Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1996

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 203 (WT=3,03) i 204 (WT=1,90) z numeru 9/1995

Aleksander Surma	– Myszków	30,79
Przemysław Gworys	– Częstochowa	25,49
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	24,43
Jarosław Łazuka	– Warszawa	21,66

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Zadania z fizyki nr 217, 218

Redaguje Jerzy B. BROJAN

217. Bardzo długa jednorodna pozioma belka opiera się na wielu równo odległych podporach. Jeśli pada śnieg obciążając belkę równomiernie, to pierwsze złamanie belki nastąpi w jednym z punktów podparcia czy w jednym z punktów środkowych między podporami? Zakładamy, że: a) odchylenie belki $y(x)$ w punkcie x od prostej poziomej jest niewielkie, b) belka podlega prawu Hooke'a, tzn. w każdym punkcie jej krzywizna (zgodnie z punktem a) równa drugiej pochodnej $y''(x)$) jest proporcjonalna do momentu siły zginającej.

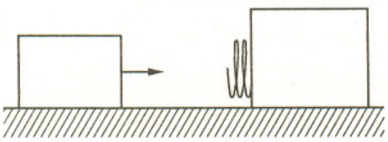
218. Głośnik zamknięto pod kloszem pompy próżniowej. Ile powinno wynosić ciśnienie pod kloszem, aby dźwięk dobiegający na zewnątrz był o 20 dB słabszy niż przy ciśnieniu normalnym? Temperatura powietrza jest ustalona.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1995

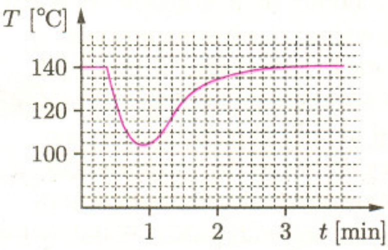
Przypominamy treść zadań:

209. Klocek o masie m uderzył w klocek o masie M zaopatrzony w sprężynowy zderzak o stałej sprężystości k (rys. 1). Współczynnik tarcia f o podłoże jest jednakowy dla obu klocków i ma taką samą wartość dla tarcia statycznego, co dla kinetycznego. Po ściśnięciu sprężyna rozprostowała się, a klocki rozłączyły, przy czym drugi klocek pozostawał cały czas w spoczynku. Jaki warunek muszą spełniać masy m i M, aby takie zdarzenie mogło zajść? Zakładamy, że długość swobodna sprężyny jest wystarczająco duża, aby nie uległa „ściśnięciu do zera", tzn. oddziaływanie między klockami jest opisywane przez prawo Hooke'a.

210. Pojemnik zawiera element grzejny o mocy $P = 200$ W i termometr mierzący temperaturę zewnętrznej powierzchni pojemnika.
Pojemnik umieszczono w pokoju o temperaturze $T_0 = 20°$C i włączono grzejnik, w wyniku czego po dłuższym czasie termometr wskazał temperaturę $T_k = 140°$C. Wtedy wrzucono do pojemnika metal o masie $m = 100$ g i temperaturze T_0 i szybko zamknięto pojemnik. Ile wynosi ciepło właściwe tego metalu, jeśli przebieg wskazań termometru jest dany przez rysunek 2?



Rys. 1



Rys. 2

209. W chwili zatrzymania pierwszego klocka sprężyna ulega ściśnięciu o wielkość x, która musi spełniać dwa warunki:
a) $kx \le fMg$ (drugi klocek nie rusza z miejsca),
b) $\frac{1}{2}kx^2 > fmgx$, czyli $kx > 2fmg$ (energia sprężyny jest większa od pracy siły tarcia na drodze powrotnej).

Stąd szukany warunek ma postać $M > 2m$.

210. Przyjmijmy, że tempo odpływu ciepła do otoczenia jest proporcjonalne do różnicy temperatur. W stanie równowagi, gdy temperatura pojemnika jest równa T_k, bilans energii ma postać

$$P = \alpha(T_k - T_0)\,.$$

Z tego równania otrzymujemy wartość stałej proporcjonalności $\alpha = 1{,}67$ W/°C. Po wrzuceniu metalu należy uwzględnić w bilansie ciepło oddane metalowi $\mathrm{d}Q_m$ i ciepło pobrane od samego pojemnika $\mathrm{d}Q_p$ (w późniejszej fazie, gdy pojemnik z powrotem się ogrzewa, to ciepło jest ujemne)

$$P\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}Q_p = \alpha(T - T_0)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}Q_m\,.$$

Podstawmy tu $P = \alpha(T_k - T_0)$ i scałkujmy. Całkowite ciepło Q_p jest równe zeru, gdyż pojemnik wraca do początkowej temperatury. Stąd

$$\alpha\int(T_k - T)\,\mathrm{d}t = Q_m\,.$$

Należy zatem obliczyć pole zawarte między podanym wykresem a prostą $T = T_k$. Wynosi ono w przybliżeniu 2230°C·s, więc $Q_m \approx 3720$ J, a ciepło właściwe $c \approx 310$ J/(kg·°C).

Zadania z matematyki nr 319, 320

Redaguje Marcin E. KUCZMA

319. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych) układ równań:

$$\begin{cases} (1+x^2)y &= x \\ 12y^3 + z &= 3y+2 \\ |3z-5| &= 1-x. \end{cases}$$

320. Dla danych liczb dodatnich R i r, spełniających warunek $R \geq 2r$, obliczyć kres dolny oraz kres górny pól trójkątów wpisanych w koło o promieniu R i (jednocześnie) opisanych na kole o promieniu r.

Zadanie **320** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1995

Przypominamy treść zadań:

311. Znaleźć wszystkie funkcje niemalejące f, określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające warunek:

(1) $$2f(x^2+y^2) = f(x)^2 + f(y)^2 \quad \text{dla} \quad x, y = 0, 1, 2, \ldots .$$

312. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których istnieje n-kąt foremny o wierzchołkach w punktach kratowych przestrzeni trójwymiarowej.

311. Przyjmując w równaniu (1) $x = y = 1$ dostajemy równość

(2) $$f(2) = f(1)^2 .$$

Przyjmując zaś $x = y = 0$ widzimy, że $f(0) = 0$ lub $f(0) = 1$.

Jeżeli $f(0) = 1$, to podstawiając w (1) $y = 0$ otrzymujemy

(3) $$2f(x^2) = f(x)^2 + 1 \quad \text{dla} \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Stąd $f(1) = 1$, więc $f(2) = 1$ (wzór (2)), i ogólnie:

$$f(2^{2^n}) = 1 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(dowód indukcyjny z wykorzystaniem wzoru (3));
z monotoniczności funkcji f wynika więc, że (w tym przypadku)

(4) $$f(x) = 1 \quad \text{dla} \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy $f(0) = 0$. Wówczas z równania (1) mamy

(5) $$2f(x^2) = f(x)^2 \quad \text{dla} \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Zatem $f(1) = 0$ lub $f(1) = 2$.

Jeśli $f(1) = 0$, to $f(2) = 0$ (równość (2)). Stąd

$$f(2^{2^n}) = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(indukcja z wykorzystaniem wzoru (5)) i wobec monotoniczności:

(6) $$f(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Jeśli natomiast $f(1) = 2$, to $f(2) = 4$ (równość (2)). Stąd

(7) $$f(2^{2^n}) = 2^{2^n+1} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(znów indukcja z wykorzystaniem wzoru (5)). Ze wzoru (5) widać ponadto, że wszystkie wartości funkcji f są liczbami parzystymi. Kładąc w (5) $x = t+1$ dostajemy nierówność

$$f(t+1)^2 = 2f(t^2+2t+1) \geq 2f(t^2+1) = f(t)^2 + 4 > f(t)^2 ,$$

skąd (wobec parzystości porównywanych liczb):
$f(t+1) \geq f(t) + 2$, i ogólnie (indukcja):

(8) $$f(t+k) \geq f(t) + 2k \quad \text{dla} \quad t, k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Weźmy dowolną liczbę naturalną $x > 1$; dobierzmy tak wykładnik m, by $2^{2^m} \leq x < 2^{2^{m+1}}$. Tak więc

(9) $$x = 2^{2^m} + u = 2^{2^{m+1}} - v ,$$

gdzie $u \geq 0$, $v > 0$ oraz

(10) $$u + v = 2^{2^{m+1}} - 2^{2^m} \ (= 2^{2^m}) .$$

Podstawiając w (8) $t = 2^{2^m}$, $k = u$ mamy, zgodnie ze wzorem (7),

(11) $$f(x) \geq 2^{2^m+1} + 2u ;$$

a podstawiając $t = x$, $k = v$ dostajemy

(12) $$2^{2^{m+1}+1} \geq f(x) + 2v .$$

Ale ze związku (10) wynika, że suma lewych stron nierówności (11) i (12) jest równa sumie ich prawych stron. Nierówności te są więc faktycznie równościami; a każda z nich oznacza (w myśl (9)), że $f(x) = 2x$. Zatem, wobec dowolności wyboru x,

(13) $$f(x) = 2x \quad \text{dla} \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Trzy znalezione funkcje, dane wzorami (4), (6) i (13), stanowią ogólne rozwiązanie rozważanego równania (1).

312. Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 3$ i przypuśćmy, że n-kąt foremny, o jakim mowa, istnieje. Spośród wszystkich takich n-kątów wybieramy n-kąt o najkrótszym boku (jest to możliwe, bo długości boków są pierwiastkami z liczb naturalnych). Niech $A_1A_2\ldots A_n$ będzie wybranym n-kątem. Każdy z trójkątów $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ uzupełniamy do równoległoboku $A_{i-1}A_iA_{i+1}B_i$ (wskaźniki $i \pm 1$ należy odczytywać modulo n). Punkty $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są punktami kratowymi. Gdy $n \notin \{3, 4, 6\}$, są one także wierzchołkami niezdegenerowanego n-kąta foremnego, mniejszego od $A_1A_2\ldots A_n$ – wbrew wyborowi tego ostatniego. Zatem n musi być jedną z liczb 3, 4, 6; a dla każdej z tych trzech wartości n bez trudu znajdujemy żądany n-kąt.