epsilon

4/96

(61)

Trzy lata temu (w *EPSILONIE* 12/1992), po setnej rocznicy narodzin Stefana Banacha pisaliśmy o informacjach o Banachu w XV edycji *Encyclopaedia Britannica*. Przypomnijmy – hasło zaczynało się od słów:

Banach, Stefan (*b. March 30, 1892, Kraków, Austria-Hungary – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R), Soviet mathematician who founded modern functional analysis and...*

Potem jeszcze dwukrotnie w tekście wspomniany był „Lvov" jako miejsce pracy Banacha, o Polsce nie było ani słowa. W kolejnym wydaniu XV edycji początek został zmieniony! Jak?

Banach, Stefan (*b. March 30, 1892, Kraków, Pol. – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R), mathematician who founded modern functional analysis and...*

Czytelnik mógł więc wywnioskować, że co prawda Banach urodził się w Pol., ale matematykiem był radzieckim.

Chcemy poinformować (a akurat niedawno minęła 50. rocznica śmierci Banacha), że ewolucja hasła w *Encyclopaedia Britannica* trwa! Oto, jak ono wygląda w kolejnym wydaniu:

Banach, Stefan (*b. March 30, 1892, Kraków, Austria-Hungary [now in Poland] – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R), Polish mathematician who founded modern functional analysis and...*

W dalszym ciągu notki istotnych zmian nie wprowadzono.

Przypomina to słynną matematyczną metodę kolejnych przybliżeń, używaną m.in. w dowodzie twierdzenia Banacha o punkcie stałym. W kolejnych wydaniach hasło jest coraz lepsze, co nie znaczy, że dobre. Skąd Czytelnik w USA ma wiedzieć coś o Lwowie, a w szczególności, kiedy Lwów został zagarnięty przez Związek Radziecki? Dalej może myśleć, że Banach (choć już matematyk polski) swoich dokonań, o których mowa w haśle w encyklopedii, dokonywał pracując na wyższych uczelniach w Ukraińskiej SSR (tak jak, na przykład, szwajcarski matematyk Euler w Rosji, w Petersburgu).

Ciekawe, czy będą jeszcze kolejne przybliżenia, czy też już został osiągnięty punkt stały?

Podsłuchane na zajęciach

Wykład (prowadzony na podstawie skryptu napisanego przez wykładowcę):

– Proszę państwa, w skrypcie jest napisane, że to jest trywialne, ale jakoś w tej chwili nie widzę, dlaczego.

Ćwiczenia (inny prowadzący):

– Pan mówi, że to widać, ja mówię, że nie widać, a na razie to ja decyduję o tym, czy coś widać, czy nie.

Wyznacznik Vandermonde'a

Wyznacznikiem Vandermonde'a stopnia $n \geq 2$ nazywamy wyznacznik (który oznaczymy przez $V_n(a_1, \ldots, a_n)$) macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi. W książce „Elementy algebry wyższej" jej Autorzy, Andrzej Mostowski i Marceli Stark, dowodzą, że

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \\ = \prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1)(a_k - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_k - a_{k-1}) . \tag{2}$$

Tutaj podamy inny, krótki i bardzo elegancki, sposób wyprowadzenia wzoru (2). Mianowicie, oznaczmy $P(x) = V_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$.

P jest wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$; nietrudno zauważyć, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ są jego pierwiastkami. Wielomian P można zatem zapisać w postaci

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n-1}) ,$$

gdzie A jest współczynnikiem wielomianu P stojącym przy x^{n-1}. Ale ten współczynnik to po prostu wyznacznik macierzy powstałej z macierzy (1) przez skreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, czyli $V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Stąd $V_n(a_1, \ldots, a_n) = P(a_n) = = V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - -a_{n-1})$. A ponieważ $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$, więc przez łatwą indukcję dostajemy wzór (2).

Do czego służy wyznacznik Vandermonde'a? Wzór (2) znajduje, między innymi, zastosowanie w rozwiązaniu klasycznego problemu interpolacyjnego Newtona:

Dane są liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ przy czym liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parami różne. Jak wyznaczyć (i czy w ogóle istnieje) wielomian P, możliwie najniższego stopnia, o współczynnikach rzeczywistych, dla którego $P(a_i) = b_i (i = 1, \ldots, n)$?

Zagadnienie to, jako łatwe ćwiczenie „na wyznacznik Vandermonde'a i wzory Cramera" pozostawiam Czytelnikowi. Proponuję również zastosować podobną metodę, jak w dowodzie wzoru (2), do obliczenia wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi.

Waldemar POMPE

Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.