Dlaczego w przestrzeni trójwymiarowej nie ma przyzwoitego mnożenia?

Wszyscy uczyliśmy się w szkole dodawać i mnożyć liczby rzeczywiste. Łatwo wymienić podstawowe własności tych działań:

(a) dodawanie jest łączne, przemienne i ma element neutralny; dla każdego elementu a istnieje element przeciwny $-a$;
(b) mnożenie jest łączne, przemienne i ma element neutralny 1; dla każdego elementu $a \neq 0$ istnieje element odwrotny a^{-1};
(c) mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Oprócz zbioru liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ w szkole poznaliśmy też zbiory liczb naturalnych $\mathbf{N}$, całkowitych $\mathbf{Z}$ i wymiernych $\mathbf{Q}$. Chociaż w każdym z nich możemy liczby dodawać i mnożyć, tylko $\mathbf{Q}$, obok $\mathbf{R}$, spełnia wszystkie wymagania (a)–(c). Matematyk powie krótko, że zbiory $\mathbf{R}$ i $\mathbf{Q}$ są *ciałami*, a zbiory $\mathbf{N}$ i $\mathbf{Z}$ ciałami nie są.

Czy potrafisz podać przykład ciała zawartego pomiędzy $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$?

Przykładem ciała większego od $\mathbf{R}$ jest zbiór liczb zespolonych $\mathbf{C}$. Przypomnijmy, że liczbami zespolonymi nazywamy wyrażenia postaci $a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$. Liczby te dodajemy i mnożymy podobnie jak wielomiany z wykorzystaniem dodatkowej relacji: $i^2=-1$. Nietrudno sprawdzić, że tak określone działania mają własności (a)–(c), tj. $\mathbf{C}$ jest ciałem.

Na przykład: $(2+3i)+(4+2i)=6+5i$;
$(2+3i)\cdot(4+2i)=8+16i+6i^2=2+16i$.

Ponieważ każda liczba zespolona $a+bi$ jest w istocie parą liczb rzeczywistych (a,b), zbiór $\mathbf{C}$ możemy uznać za płaszczyznę $\mathbf{R}^2$, wyposażoną w działania dodawania i mnożenia jej punktów. Przy powyższej interpretacji działania te wyrażają się wzorami $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ oraz $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

Zauważmy, że powyższe dodawanie można łatwo uogólnić na przestrzeń trójwymiarową $\mathbf{R}^3$: należy trójki liczb dodawać jak wektory, tj. „po współrzędnych" $(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

Powstaje ciekawe pytanie: czy przestrzeń trójwymiarową $\mathbf{R}^3$ można wyposażyć dodatkowo w działanie mnożenia, które by wraz z takim dodawaniem spełniało warunki (a)–(c)? Chcielibyśmy przy tym, by to mnożenie było też zgodne z istniejącym w $\mathbf{R}^3$ mnożeniem przez skalary, tj. aby zachodziły równości $(t\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot(t\mathbf{w})$ dla dowolnych $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{R}^3$ oraz $t\in\mathbf{R}$. O takim mnożeniu mówimy, że jest **dwuliniowe**.

Mnożenie „po współrzędnych" jest niedobre: wtedy iloczyn dwóch elementów różnych od zera może być zerem, np. $(1,0,0)\cdot(0,1,0)=(0,0,0)$. To w żadnym ciele się nie zdarza – dlaczego?

Udowodnimy

Twierdzenie. W przestrzeni $\mathbf{R}^3$ nie istnieje mnożenie, które by wraz z dodawaniem „po współrzędnych" spełniało warunki (a)–(c).

Dowód poprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że przestrzeń $\mathbf{R}^3$ ma takie mnożenie. O elementach $\mathbf{R}^3$ będzie nam wygodnie myśleć, jak o wektorach zaczepionych w punkcie $\mathbf{0}=(0,0,0)$.

Z warunku (b) wynika, że jeden z wektorów jest jedynką mnożenia – oznaczymy go przez $\mathbf{1}$. Niech L_1 będzie prostą naciągniętą na tym wektorze, tj. $L_1=\{t\cdot\mathbf{1}\colon\ t\in\mathbf{R}\}$. Dla dowolnego wektora $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3\setminus L_1$ oznaczmy przez $P(\mathbf{v})$ płaszczyznę naciągniętą na parze wektorów $\mathbf{1}$, $\mathbf{v}$. Najpierw zauważmy, że zachodzi

Lemat 1. Niech $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3\setminus L_1$. Jeśli jego kwadrat $\mathbf{v}^2$ należy do płaszczyzny $P(\mathbf{v})$, to $P(\mathbf{v})$ jest podzbiorem zamkniętym względem dodawania, odejmowania, mnożenia i brania odwrotności.

W takiej sytuacji mówimy, że podzbiór $P(\mathbf{v})$ ciała $\mathbf{R}^3$ jest jego *podciałem*.

Dowód: Oczywiście, płaszczyzna zawierająca punkt $\mathbf{0}$ jest zamknięta względem dodawania i odejmowania wektorów.

Każdy element $P(\mathbf{v})$ jest postaci $s\cdot\mathbf{1}+t\cdot\mathbf{v}$ dla pewnych $s,t\in\mathbf{R}$. Kiedy pomnożymy dwa takie wyrażenia i otworzymy nawiasy, otrzymamy kombinację wektorów $\mathbf{1}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^2$. Ponieważ każdy z nich leży w $P(\mathbf{v})$, więc iloczyn naszych wyrażeń też tam się znajdzie.

Pozostało wykazać, że jeśli $\mathbf{w}\in P(\mathbf{v})$ oraz $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$, to $\mathbf{w}^{-1}\in P(\mathbf{v})$. Jeśli $\mathbf{w}=t\cdot\mathbf{1}$, to $\mathbf{w}^{-1}=t^{-1}\cdot\mathbf{1}\in P(\mathbf{v})$. W przeciwnym przypadku $\mathbf{w}\in P(\mathbf{v})\setminus L_1$, a zatem $P(\mathbf{w})=P(\mathbf{v})$. Ponieważ wiemy już, że $P(\mathbf{v})$ jest zamknięte względem mnożenia, to $\mathbf{w}^2\in P(\mathbf{v})=P(\mathbf{w})$, tj. $\mathbf{w}^2=s\cdot\mathbf{1}+t\cdot\mathbf{w}$ dla pewnych $s,t\in\mathbf{R}$.

Jeśli jest $s=0$, to $\mathbf{w}^2=t\cdot\mathbf{w}$, a zatem $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{w}-t\cdot\mathbf{1})=\mathbf{0}$. To jest jednak niemożliwe, ponieważ oba czynniki są różne od zera. Mamy więc $s\neq 0$, a stąd $\mathbf{w}\cdot(-s^{-1}\mathbf{w}-ts^{-1}\cdot\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Zatem $\mathbf{w}^{-1}=-s^{-1}\mathbf{w}-ts^{-1}\cdot\mathbf{1}\in P(\mathbf{v})$. ■

A teraz zauważymy, że sytuacja z poprzedniego lematu... nigdy nie zachodzi.

Lemat 2. Jeśli $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3\setminus L_1$, to $\mathbf{v}^2\notin P(\mathbf{v})$.

Dowód: Przypuśćmy, że $\mathbf{v}^2\in P(\mathbf{v})$ i weźmy dowolny wektor $\mathbf{w}\in\mathbf{R}^3\setminus P(\mathbf{v})$. Wtedy wektory $\mathbf{1},\mathbf{v},\mathbf{w}$ rozpinają całą przestrzeń $\mathbf{R}^3$. W szczególności, wektor $\mathbf{wv}$ może być zapisany jako ich kombinacja: $\mathbf{wv}=r\cdot\mathbf{1}+s\cdot\mathbf{v}+t\cdot\mathbf{w}$. Ale wtedy $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}-t\cdot\mathbf{1})=r\cdot\mathbf{1}+s\cdot\mathbf{v}$, czyli $\mathbf{w}=(r\cdot\mathbf{1}+s\cdot\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}-t\cdot\mathbf{1})^{-1}$. Z Lematu 1 wiemy, że wyrażenie po prawej stronie należy do $P(\mathbf{v})$. Zatem $\mathbf{w}\in P(\mathbf{v})$, wbrew założeniu. ■

Dokończenie dowodu twierdzenia: Weźmy dowolny wektor $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3\setminus L_1$. Z Lematu 2 wnosimy, że wektory $\mathbf{1},\mathbf{v},\mathbf{v}^2$ rozpinają przestrzeń $\mathbf{R}^3$. Zatem wektor $\mathbf{v}^3$ jest ich kombinacją: $\mathbf{v}^3=r\cdot\mathbf{1}+s\cdot\mathbf{v}+t\cdot\mathbf{v}^2$.

Rozważmy funkcję $f\colon\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-r-sx-tx^2$. Ponieważ $f(x)<0$ dla wielkich liczb ujemnych oraz $f(x)>0$ dla wielkich liczb dodatnich, więc istnieje taka liczba $\lambda\in\mathbf{R}$, że $f(\lambda)=0$. Wobec tego mamy tożsamość $f(x)=(x-\lambda)(\alpha+\beta x+x^2)$. Podstawiając wektor $\mathbf{v}$ w miejsce zmiennej x otrzymujemy

$$\mathbf{0}=f(\mathbf{v})=(\mathbf{v}-\lambda\cdot\mathbf{1})(\alpha\cdot\mathbf{1}+\beta\mathbf{v}+\mathbf{v}^2).$$

Z założenia oraz z Lematu 2 wynika, że obydwa czynniki są różne od zera. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Uwaga dla koneserów: w dowodzie nie użyliśmy przemienności mnożenia. A zatem przestrzeń $\mathbf{R}^3$ nie ma nawet struktury nieprzemiennej *algebry z dzieleniem*.

Zbigniew MARCINIAK