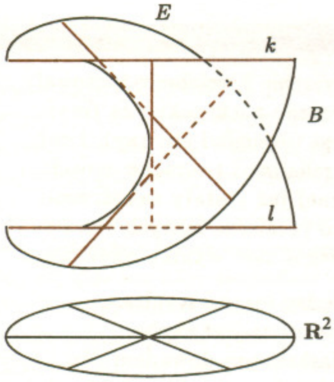
Matematyczny mikroskop

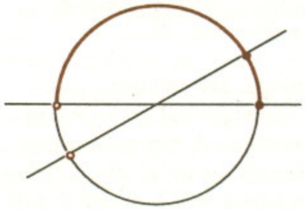
Tadeusz KRASIŃSKI



Rys. 1

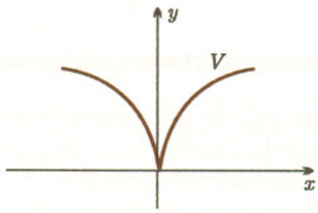
Prawie wszystkie nauki ścisłe w swoich badaniach używają urządzeń powiększających. Rola mikroskopu w fizyce, chemii, biologii, teleskopu w astronomii oraz innych narzędzi optycznych w innych naukach jest ogromna i trudno ją podważyć. Wydaje się, że tylko matematyka nie ma ani takiego narzędzia, ani problemów, które można by rozwiązać z jego pomocą.

Okazuje się, że jednak istnieje w matematyce narzędzie (czysto abstrakcyjne, oczywiście), które można uznać za pewien rodzaj mikroskopu. Tym narzędziem jest operacja rozdmuchania punktu w przestrzeni. Mówiąc obrazowo, w danej przestrzeni X (może to być płaszczyzna, powierzchnia, przestrzeń trójwymiarowa itd.) rozdmuchujemy (albo, jeśli kto woli, rozszczepiamy, rozciągamy) jeden z jej punktów, P, do pewnego zbioru punktów tak, by każdy „nowy" punkt odpowiadał jednemu kierunkowi dochodzącemu do punktu P. Wówczas obiekty (figury, podzbiory) wyjściowej przestrzeni X, zawierające punkt P, stają się na ogół prostsze (lub „lepiej widoczne") w przestrzeni rozdmuchanej.



Rys. 2

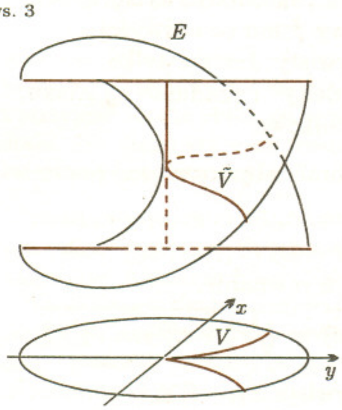
Przejdźmy do dokładniejszego opisu. Dla prostoty ograniczymy się do rozdmuchania punktu płaszczyzny rzeczywistej $\mathbf{R}^2$. Rozdmuchaniem płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ w punkcie $(0,0)$ nazywamy nową, leżącą nad płaszczyzną, powierzchnię B, która powstaje przez wklejenie okręgu E w miejsce punktu $(0,0)$ w taki sposób, że B jest powierzchnią bez osobliwości. (Kto nie wierzy, że to możliwe, niech obejrzy rys. 1).



Rys. 3

Można sobie wyobrażać, że aby otrzymać powierzchnię B, podnosimy pewną prostą l do góry i obracamy ją jednocześnie o kąt 180° wokół pionowej osi otrzymując prostą k. Prosta zakreśla podczas tego ruchu pewną powierzchnię. Powierzchnia B powstaje z niej przez utożsamienie skrajnych prostych k i l (patrz rysunek). Łatwo zauważyć, że jest to konstrukcja wstęgi Möbiusa, w której zamiast odcinka używamy całej prostej. Nad każdym punktem płaszczyzny $\mathbf{R}^2$, różnym od początku układu współrzędnych, leży dokładnie jeden punkt powierzchni B, a nad punktem $(0,0)$ zbiór E, zwany fachowo *dywizorem wyjątkowym*, który możemy utożsamić z okręgiem. To ostatnie stwierdzenie stanie się jaśniejsze, gdy przeprowadzimy następujące rozumowanie.

Dowolnej prostej w $\mathbf{R}^2$ przechodzącej przez $(0,0)$ odpowiada w B pewna „prosta" leżąca nad nią. Dwóm różnym takim prostym w $\mathbf{R}^2$ będą odpowiadały dwie „proste" w B – tym razem rozłączne (proszę jeszcze raz spojrzeć na rys. 1). W B następuje więc „rozszczepienie" kierunków w $\mathbf{R}^2$ dochodzących do $(0,0)$ – każdemu kierunkowi w $\mathbf{R}^2$ możemy przyporządkować jeden punkt wklejonego zbioru E. Zatem rzeczywiście zbiór E można utożsamić z okręgiem: zbiór kierunków w $\mathbf{R}^2$ to inaczej zbiór prostych przechodzących przez $(0,0)$, ten zaś zbiór nietrudno utożsamić z okręgiem. Istotnie, każdemu kierunkowi odpowiadają dwa antypodyczne punkty na okręgu, po sklejeniu których znów otrzymamy okrąg (rys. 2).

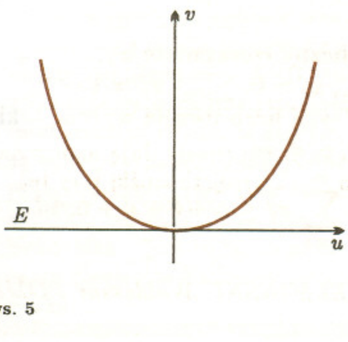


Rys. 4

W tym artykule pojęcie stycznej rozumiemy nieco szerzej, niż to się zwykle robi. W przykładzie z parabolą półsześcienną $y^3 - x^2 = 0$ oś Oy jest styczna do krzywej w $(0,0)$, zaś oś Ox nie.

Operacji rozdmuchania używa się głównie do badania osobliwości krzywych opisanych równaniami wielomianowymi. Jeśli np. rozważymy krzywą V o równaniu $y^3 - x^2 = 0$ w $\mathbf{R}^2$ o jedynym punkcie osobliwym $(0,0)$ (patrz rys. 3), to po rozdmuchaniu punktu $(0,0)$ będzie jej odpowiadała leżąca na powierzchni B krzywa $\tilde{V}$ bez osobliwości (patrz rys. 4), zwana *przeciwobrazem właściwym* wyjściowej krzywej. Dokładniej, $\tilde{V}$ jest parabolą w B – za chwilę to uzasadnimy.

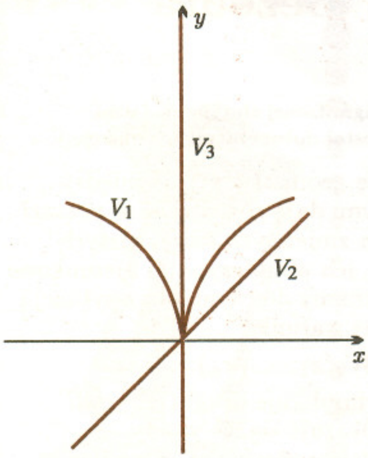
Analitycznie przeciwobraz właściwy krzywej opisuje się w następujący sposób: jeśli $f(x,y) = 0$ jest równaniem krzywej V w $\mathbf{R}^2$ przechodzącej przez $(0,0)$ i oś Ox (odp. Oy) nie jest styczna do tej krzywej w punkcie $(0,0)$, to podstawiamy $x = uv$, $y = v$ (odp. $x = v$, $y = uv$) do równania $f(x,y) = 0$. To znaczy, rozważamy równanie $f(uv,v) = 0$ (odp. $f(v,uv) = 0$). Następnie dzielimy to równanie przez możliwie najwyższą potęgę v. Równanie, otrzymane po tych operacjach, jest równaniem krzywej $\tilde{V}$ w przestrzeni rozdmuchanej. Na przykład, dla rozważanej powyżej paraboli półsześciennej $f(x,y) = y^3 - x^2 = 0$ mamy $f(uv,v) = v^2(v - u^2)$. Zatem krzywa ta po rozdmuchaniu jest parabolą opisaną równaniem $v - u^2 = 0$ (rys. 5).



Rys. 5

W B zbiór E (dywizor wyjątkowy) opisany jest równaniem $v = 0$, czyli jest osią Ou.

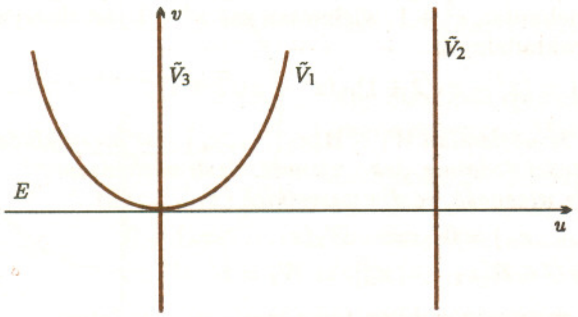
W przypadku, gdy zarówno oś Ox, jak i oś Oy są stycznymi do krzywej (np. dla krzywej $x(y - x^2) = 0$), to tak zmieniamy współrzędne w $\mathbf{R}^2$, by nowe osie już tej własności nie miały.



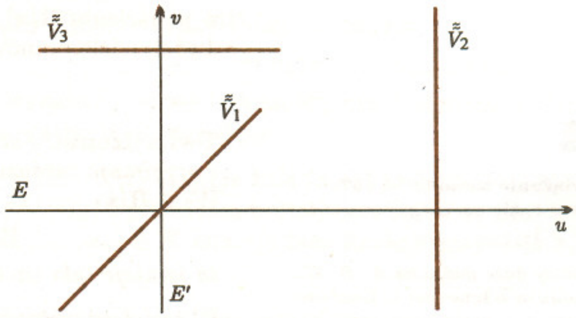
Rys. 6

Ponieważ rozdmuchanie punktu płaszczyzny jest lokalną modyfikacją współrzędnych w $\mathbf{R}^2$, a powierzchnia B nie ma osobliwości, to operację tę możemy zastosować następnie do jednego z punktów B. Zatem rozdmuchania możemy iterować, otrzymując kolejne powierzchnie B',B'',… itd. Rozważmy, na przykład, krzywą $y^5 - x^2 = 0$ z osobliwością w $(0,0)$. Po rozdmuchaniu punktu $(0,0) \in \mathbf{R}^2$ otrzymujemy w B krzywą $v^3 - u^2 = 0$, która nadal ma punkt osobliwy w $(0,0)$. Następnie, po rozdmuchaniu punktu $(0,0)$ na powierzchni B otrzymamy krzywą $v' - u'^2 = 0$ na powierzchni B', która nie ma już punktu osobliwego.

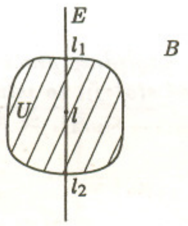
Widzimy więc, że zastosowanie wielokrotnego (w tym przypadku dwukrotnego) rozdmuchania „rozwiązało" osobliwość wyjściowej krzywej. Jest to reguła ogólna. Dla dowolnej krzywej algebraicznej, mającej punkt osobliwy w $(0,0)$, istnieje taki skończony ciąg rozdmuchań, że po ich wykonaniu otrzymamy krzywą bez osobliwości. Okazuje się również, że końcowa konfiguracja, złożona z układu wklejanych kolejno okręgów oraz układu krzywych, otrzymanych z wyjściowej, niesie bardzo wiele informacji o rodzaju osobliwości pierwotnej krzywej w $\mathbf{R}^2$. Bliższe wyjaśnienie tego zjawiska przekracza ramy artykułu w *Delcie*. By jednak odrobinę jeszcze Czytelnika z rozdmuchaniem oswoić, rozważmy jeszcze jeden przykład, tym razem krzywej rozkładalnej, tzn. składającej się z kilku krzywych, które są już nierozkładalne na prostsze krzywe. Mianowicie, niech V będzie krzywą opisaną równaniem $f(x,y) = (y^3 - x^2)(y - x)x = 0$. Jak widać na rysunku 6, V składa się z trzech krzywych: paraboli półsześciennej V_1 o równaniu $y^3 - x^2 = 0$ i dwóch prostych V_2 i V_3 o równaniach odpowiednio $y - x = 0$ oraz $x = 0$. Po pierwszym rozdmuchaniu otrzymamy złożoną z dwóch rozłącznych części konfigurację w B, przedstawioną na rysunku 7.



Rys. 7



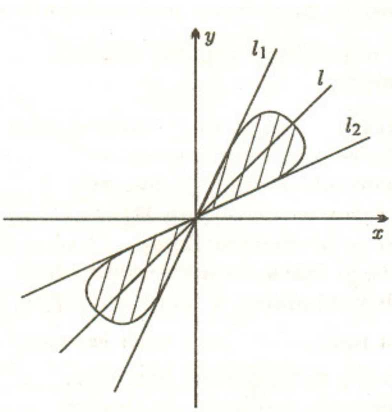
Rys. 8



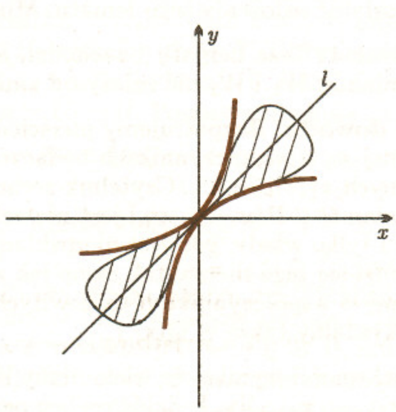
Rys. 9

Kolejne rozdmuchanie, tym razem powierzchni B w punkcie $(0,0)$, daje nam nową konfigurację w B' (patrz rys. 8). Tym razem krzywe wyjściowe nie mają punktów osobliwych i są rozdzielone.

Wszystkie te prościutkie przykłady pokazują, że kolejne rozdmuchania są jak gdyby kolejnymi stopniami „powiększania". Struktura osobliwości danej krzywej staje się coraz lepiej „widoczna". Fakt, że iteracje rozdmuchań są kolejnymi stopniami „powiększania", można jeszcze wyjaśnić w taki sposób. Weźmy dowolny punkt l na wklejonym okręgu E powierzchni B (jak już wiemy, odpowiada on jednemu kierunkowi w $\mathbf{R}^2$) i jego małe otoczenie U (rys. 9).



Rys. 10



Rys. 11

W U odzwierciedlony jest tylko kawałek stożka w $\mathbf{R}^2$ zawarty między kierunkami l_1 i l_2 (rys. 10).

Jeśli teraz rozdmuchamy punkt l w B i weźmiemy otoczenie dowolnego punktu $l' \in E'$ w przestrzeni B', to już w tym otoczeniu odzwierciedlona jest część (krzywoliniowego) stożka stycznego do l w wyjściowej płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ (rys. 11).

Kolejne rozdmuchania dają nam wgląd w coraz to ostrzejsze stożki (czy też może „dziobki") dotykające $(0,0)$ w $\mathbf{R}^2$. Zatem wielokrotne rozdmuchanie jest rzeczywiście specyficznym, wielostopniowym mikroskopem matematycznym.