Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1996

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Zadania z matematyki nr 317, 318

Redaguje Marcin E. KUCZMA

317. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieją wielomiany drugiego stopnia F, G, H, o współczynnikach rzeczywistych, spełniające warunek: $H(G(F(k))) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

318. Dowieść, że dla każdej pary liczb naturalnych $m, n \geq 2$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right].$$

Zadanie 318 zaproponował Pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1995

Przypominamy treść zadań:

309. Elipsę $\{(x,y)\colon\ 49x^2 + y^2 \leq 100\}$ dzielimy na dwie części prostą przechodzącą przez punkt $(1,1)$. Obliczyć najmniejszą możliwą wartość pola mniejszej części.

310. Sześć par małżeńskich zasiada w rzędzie teatru. Ile jest możliwości rozsadzenia, przy których żaden mąż nie zajmuje miejsca obok swej żony?

309. Dana elipsa E ma półosie $a = \frac{10}{7}$, $b = 10$; jej pole równa się $S = \pi ab = \frac{10}{7}\pi$. Podstawienie $t = 7x$ wyznacza przekształcenie afiniczne $f\colon (x,y) \mapsto (t,y)$, przeprowadzające elipsę E na koło $K = \{(t,y)\colon\ t^2 + y^2 \leq 100\}$ (o promieniu $r = 10$), a punkt $P = (1,1)$ – na punkt $Q = (7,1)$, którego odległość od środka $O = (0,0)$ koła K wynosi $\sqrt{50}$, czyli $r/\sqrt{2}$. Cięciwa AB koła K, prostopadła do odcinka OQ, jest więc bokiem kwadratu $ABCD$ wpisanego w to koło. Obszar G zawarty między cięciwą AB a łukiem AB jest najmniejszą częścią koła K, jaką może odciąć prosta przechodząca przez punkt Q; jego pole równa się $(\pi-2)/(4\pi)$ pola koła. Stosunek pól figur jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych. Wobec tego zbiór $f^{-1}(G)$ jest najmniejszą częścią elipsy E, jaką może odciąć prosta przechodząca przez punkt P, a pole tej minimalnej części wynosi $S\cdot(\pi-2)/(4\pi)$, czyli $\frac{25}{7}(\pi-2)$.

310. Rozważamy analogiczne zagadnienie dla n par małżonków. Niech A_n będzie liczbą tych rozsadzeń, przy których żaden mąż nie sąsiaduje za swoją żoną, i niech B_n będzie liczbą tych rozsadzeń, przy których dokładnie jedno małżeństwo zajmuje sąsiednie miejsca. Udowodnimy dwie zależności rekurencyjne:

(1) $\qquad B_n = A_n + 2nA_{n-1}\,,$

(2) $\qquad B_n = 2n[(2n-1)A_{n-1} + B_{n-1}].$

Możliwe są dwie sytuacje, w których dokładnie jedna para jest nierozdzielona: albo ta para zajmuje dwa skrajne miejsca od lewej strony, albo jakieś dwa inne miejsca. Pierwszą z tych sytuacji można zrealizować na $2nA_{n-1}$ sposobów (n możliwości wyboru pary, 2 warianty usadzenia tej pary, oraz A_{n-1} rozsadzeń pozostałych $n-1$ par). Teraz druga sytuacja: nierozdzielona para zajmuje miejsca o numerach k i $k+1$, gdzie $k \geq 2$. Przesadzamy osobę z miejsca k na lewy skraj rzędu, a wszyscy zajmujący miejsca od numeru 1 do $k-1$ przesuwają się o jedno miejsce w prawo; powstaje konfiguracja, w której wszystkie pary są rozdzielone. Na odwrót, mając dowolne rozsadzenie z wszystkimi parami rozdzielonymi, przesuwamy osobę z lewego skraju rzędu na miejsce bezpośrednio z lewej strony jej/jego małżonka, a grupę osób, która ich rozdzielała przesuwamy o jedno miejsce w lewo.

Te operacje (wzajemnie odwrotne) ustalają bijekcję między zbiorem rozsadzeń z jedną parą nierozdzieloną (ale nie na lewym skraju rzędu!) a zbiorem rozsadzeń z wszystkimi parami nierozdzielonymi – czyli zbiorem o liczności A_n.

Obie rozpatrzone sytuacje odpowiadają dwóm składnikom po prawej stronie wzoru (1) i dowodzą jego słuszności.

Weźmy ponownie pod uwagę układ, w którym dokładnie jedno małżeństwo („państwo Nowakowie") siedzi na sąsiednich miejscach. Wyobraźmy sobie, że przyszli oni jako ostatni, zastając $n-1$ par już siedzących w jakiejś kolejności. Albo wszystkie te pary były rozdzielone (A_{n-1} możliwości), a państwo Nowakowie siedli na lewym skraju, na prawym skraju, bądź między dwiema już siedzącymi osobami (razem $2n-1$ możliwości) – albo też dokładnie jedna spośród $n-1$ par była nierozdzielona (B_{n-1} możliwości), a państwo Nowakowie wcisnęli się właśnie pomiędzy tych małżonków. To daje wyrażenie w nawiasie kwadratowym we wzorze (2). Przed nawiasem mamy czynnik $2n$ biorący się stąd, że w roli „państwa Nowaków" może wystąpić każda spośród n par i że pan Nowak może usiąść z lewej lub z prawej strony swej żony. W ten sposób dostajemy równość (2).

Przyrównując prawe strony (1) i (2) oraz podstawiając w miejsce B_{n-1} prawą stronę wzoru analogicznego do (1) (z n zastąpionym przez $n-1$) otrzymujemy – po uporządkowaniu – rekurencję drugiego rzędu:

(3) $\quad A_n = 2n[(2n-1)A_{n-1} + (2n-2)A_{n-2}] \qquad$ (dla $n \geq 3$).

Oczywiście, $A_1 = 0$, $B_1 = 2$; stąd $B_2 = 8$ (wzór (2)), $A_2 = 8$ (wzór (1)), i stosując kilkakrotnie wzór (3) znajdujemy szukaną wartość $A_6 = 168422400$.

Uwaga. Można udowodnić (korzystając ze wzoru (3) lub stosując inne rozważania kombinatoryczne), że

$$A_n = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(2n-k)!(-2)^k;$$

pytanie, czy tę sumę da się „zwinąć"...

Zadania z fizyki nr 215, 216

Redaguje Jerzy B. BROJAN

215. Kwadrat zbudowany jest ze sztywnych prętów o długości a połączonych w wierzchołkach przegubowo i sprężyście. Zmiana kąta w wierzchołku o α (tak, że staje się on równy $90° + \alpha$ lub $90° - \alpha$) powoduje wystąpienie momentu siły równego $k\alpha$ o zwrocie przywracającym kąt $90°$. Obliczyć okres małych drgań deformujących kwadrat do rombu, jeśli:

a) w wierzchołkach znajdują się masy punktowe m, a poza tym pręty są nieważkie,

b) w środkach prętów znajdują się masy punktowe m, a poza tym pręty są nieważkie,

c) każdy pręt ma masę m rozłożoną jednorodnie.

216. Ocenić minimalną wielkość liter na powierzchni Ziemi pozwalającą odczytać w świetle widzialnym napis z satelity krążącego na wysokości 400 km, przy użyciu przyrządów optycznych o rozmiarach nie przekraczających 1 m.

Uwaga. Istnieją metody komputerowego przetwarzania obrazów, które zmniejszają nieostrość i poprawiają zdolność rozdzielczą. W rozwiązaniu należy to pominąć.

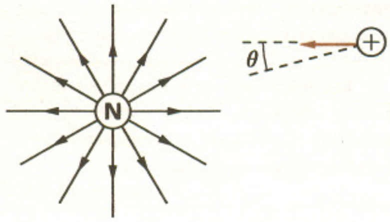
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1995

Przypominamy treść zadań:

207. Monopol magnetyczny jest hipotetyczną cząstką wytwarzającą pole magnetyczne opisane wzorem

$$\mathbf{B} = g\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (g \text{ – ładunek magnetyczny}).$$

Załóżmy, że do unieruchomionego monopola o ładunku magnetycznym g zbliża się cząstka o masie m i ładunku elektrycznym q. W chwili początkowej cząstka ma prędkość v, jej odległość od monopola jest równa r, a kąt między wektorem prędkości i wektorem wodzącym $\vec{r}$ wynosi θ (rys. 1). Obliczyć minimalną odległość zbliżenia cząstki do monopola.



Rys. 1

208. Aby belka podparta w środku nie przełamała się pod własnym ciężarem, jej długość nie powinna przekraczać wartości l_1. Jaką maksymalną długość l_2 może osiągnąć bez złamania belka podparta w dwóch punktach i w których punktach należy ją podeprzeć? Wymiary poprzecznego przekroju belek i rodzaj materiału są ustalone.

207. Podstawmy do równania $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ siłę Lorentza $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{qg\mu_0}{4\pi m}\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Podobnie jak dla każdego innego pola magnetycznego, wynika stąd wniosek, że $\mathbf{v}\cdot(\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t) = 0$, czyli $|\mathbf{v}| = \text{const}$. Dodatkowo mamy $\mathbf{r}\cdot(\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t) = 0$, zatem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v} = v^2 = \text{const}$, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = v^2t + c$. Odpowiednio przesuwając początek osi czasu możemy położyć stałą c równą 0 – wtedy w chwili początkowej mamy $t = \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}/v^2$. Dalej $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 = 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 2v^2t$, $r^2 = v^2t^2 + d$ (d – stała). Widzimy, że minimalna wartość r jest równa $\sqrt{d}$, a podstawiając wartości r i t w chwili początkowej uzyskamy rozwiązanie

$$r_{\min} = \sqrt{r^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2/v^2} = r\sin\theta.$$

Ciekawe, że chociaż pole monopola wpływa na ruch cząstki odchylając go od linii prostej, to zależność r i $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}$ od czasu jest taka, jak dla ruchu jednostajnego prostoliniowego.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 201 (WT=1,12) i 202 (WT=3,16) z numeru 8/1995

Artur Gawryszczak	– Dubeczno	45,78
Aleksander Surma	– Myszków	30,79
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	24,43
Przemysław Gworys	– Częstochowa	24,39
Jarosław Łazuka	– Warszawa	20,14

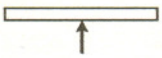
208. Złamanie belki w danym punkcie zależy od momentu siły wywieranego przez jedną część belki na drugą. Dla belki podpartej w środku największy moment zginający występuje w punkcie podparcia, natomiast dla belki z rysunku 3 oprócz punktów podparcia należy też wziąć pod uwagę punkt środkowy (nietrudno wykazać, że w innych punktach moment jest mniejszy). Na granicy wytrzymałości wszystkie te momenty są równe, skąd wynika że:

a) punkty podparcia z rysunku 3 leżą w odległości $l_1/2$ od końców belki,

b) spełnione jest równanie

$$\frac{\varrho l_1 g}{2}\frac{l_1}{4} = \frac{\varrho l_2 g}{2}\left(\frac{l_2}{4} - \frac{l_1}{2}\right),$$

gdzie ϱ – masa belki na jednostkę długości. Otrzymujemy $l_2 = l_1(1+\sqrt{2})$.



Rys. 2

Rys. 3

Rozwiązanie zadania M 765. Załóżmy, że $f = g + h$, przy czym funkcja g jest okresowa o okresie $T \neq 0$, a funkcja h – okresowa o okresie $S \neq 0$. Wówczas

$$0 \neq 2ST = (x+T+S)^2 - (x+T)^2 - (x+S)^2 + x^2 =$$
$$= (g(x+T+S) + h(x+T+S)) - (g(x+T) + h(x+T)) -$$
$$- (g(x+S) + h(x+S)) + (g(x) + h(x)).$$

Gdy skorzystamy z okresowości funkcji g i h, to okaże się natychmiast, że wyrażenie po prawej stronie jest równe 0. Wykazana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Rozwiązanie zadania M 766. Ponieważ $\varepsilon_n \neq 1$, więc $1 + \varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \dots + \varepsilon_n^{k-1} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1-\varepsilon_n)(1 + \varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \dots + \varepsilon_n^{k-1}) = 0,$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 - \varepsilon_n^k = (1 + \varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \dots + \varepsilon_n^{k-1}) - (\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \dots + \varepsilon_n^k) = 0.$$

Na mocy wzoru de Moivre'a $\varepsilon_n^k = (\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Zatem, $\varepsilon_n^k = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\frac{2k\pi}{n} = 1$, zaś $\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$, czyli gdy k jest całkowitą wielokrotnością n, co było do udowodnienia.