## Kącik olimpijski (15)

# O pewnej sprytnej metodzie, I

*Niech $P$ będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych i funkcja $f\colon P \to \mathbf{R}$ spełnia warunek $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in P$. Jeżeli liczby $x_1, \ldots, x_n$ należą do $P$, to $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geq 0$.*

To oczywiste stwierdzenie może stać się cennym narzędziem do rozwiązania niektórych, czasami niełatwych, zadań olimpijskich. Cała trudność w tego typu zadaniach polega jedynie na sprytnym dobraniu funkcji $f$ (stąd tytuł). Zacznijmy od następującego przykładu:

**1.** Wyznaczyć wszystkie ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych, dla których

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3} = \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4}\,.$$

*Rozwiązanie.* Niech $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Rozpatrzmy funkcję $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ daną wzorem $f(x) = x^2(x-a)^2$. Załóżmy, że $(x_1, \ldots, x_n)$ jest pewnym ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym dane równości. Ponieważ $f(x) \geq 0$ dla każdego rzeczywistego $x$, więc również $f(x_i) \geq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mamy:
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^4 - 2ax_i^3 + a^2x_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \\ &= a^4 - 2a\cdot a^3 + a^2\cdot a^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Zatem suma liczb nieujemnych $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ wynosi 0, a to możliwe jest jedynie wtedy, gdy każda z liczb $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ równa się 0. A ponieważ wielomian $f$ ma tylko dwa pierwiastki: 0 i $a$, więc $x_i = 0$ lub $x_i = a$ dla $i = 1, \ldots, n$. Stąd łatwo dostajemy, że każde rozwiązanie w liczbach rzeczywistych danego układu ma postać: $x_i = p$, $x_j = 0$ dla każdego $j$ różnego od $i$, gdzie $p$ jest dowolną liczbą dodatnią.

**2.** Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że nierówność

$$(*) \qquad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_n\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

*Rozwiązanie:* Ustalmy $n \in \mathbf{N}$ i weźmy funkcję $f(x) = x^2 - a_nx + a_n^2/(n-1)$. Jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej $a_n$ trójmian $f$ ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty, to dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_{n-1}$ jest $f(a_1) + \ldots + f(a_{n-1}) \geq 0$, czyli $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_n(a_1 + \ldots + a_{n-1})$. Jeśli dla pewnego rzeczywistego $a_n$ trójmian $f$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, powiedzmy $\alpha$ i $\beta$ ($\alpha < \beta$), to dla dowolnych liczb rzeczywistych $b_1, \ldots, b_{n-1} \in (\alpha, \beta)$ jest $f(b_1) + \ldots + f(b_{n-1}) < 0$, co jest równoważne nierówności $b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2 + a_n^2 < a_n(b_1 + \ldots + b_{n-1})$.

Tak więc wtedy nierówność $(*)$ nie jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych. Liczby $b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n$ stanowią kontrprzykład! Udowodniliśmy w ten sposób, że nierówność $(*)$ zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójmian kwadratowy $f$ ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty. Jeszcze tylko formalność: obliczenie „delty" i zbadanie jej znaku, co pozostawiamy Czytelnikowi.

Jakie funkcje należy dobrać, aby rozwiązać poniższe zadania?

**3.** Wyznaczyć wszystkie ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniające równanie:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}\,.$$

**4.** Dane są liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$ o sumie równej 0. Niech $m$ będzie najmniejszą, $M$ zaś największą z tych liczb. Dowieść, że $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq -nmM$.

**5.** Liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunki: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Udowodnić, że spośród tych liczb można wybrać dwie, których iloczyn jest nie większy niż $-1/n$.

**6.** Niech $n \geq 4$. Różne liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunki: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Udowodnić, że spośród tych liczb można wybrać takie cztery różne liczby $a$, $b$, $c$, $d$, że

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \leq a + b + d + nabd\,.$$

*Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Waldemar POMPE*

Wszystkie hierarchie kościelne odnotowały, że jest to sprzeczne z ich doktryną (inna sprawa, czy jest to pogląd słuszny). I co? I nic. Starcia religijne i tworzenie nowej mapy politycznej już zostały zakończone. Nie było warto rozniecać nowych stosów z powodu jakiegoś tam wyniku naukowego.

Ta różnica między losami rezultatu Kopernika i Newtona jest chyba dostatecznie jaskrawym dowodem dla każdego, kto chciałby wątpić w ścisły związek nauki z polityką. Mówię o tym, bo takich pięknoduchów ciągle się jednak spotyka.

Nowy wzorzec nauki, stworzony w XVII wieku, obowiązywał co najmniej do końca XIX stulecia. A czy obowiązuje dziś? Wiele wskazuje na to, że nie. Trudno jednak jest wyrokować kategorycznie, póki nie zrozumie się istoty nowej propozycji. A ja, niestety, na razie zobaczyć jej nie umiem.