epsilon

3/96
(60)

Cyrkiel, linijka i Australia

Dedykuję Jerzemu Sawie

Na flagach wielu państw widnieją gwiazdy. W Australii są to gwiazdy siedmioramienne tworzące Krzyż Południa. Wydaje się to osobliwe, jako że siedmiokąta foremnego nie da się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. W rozmaitych książkach autorzy dowodzący niekonstruowalności siedmiokąta foremnego najczęściej odwołują się do raczej zaawansowanego twierdzenia Gaussa. Tymczasem można tę niekonstruowalność wykazać znacznie bardziej elementarnie. Spróbujemy się o tym przekonać.

Niech $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ oznaczają odpowiednio zbiór liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych. Zbiór $K \subset \mathbf{C}$ jest *ciałem*, jeśli każde z działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$ wykonane na dowolnych dwóch liczbach z K ma wynik w K (pod warunkiem, że dzielnik jest różny od zera). Na przykład, $\mathbf{Q}$ jest ciałem. Proste ćwiczenie wykazuje, że jeśli $K \subset \mathbf{R}$ jest ciałem, $c \in K$, $c > 0$, $\sqrt{c} \notin K$, to $K(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c} : a, b \in K\}$ też jest ciałem. Opiszemy teraz, na czym polega konstrukcja za pomocą cyrkla i linijki. Na początku dane są dwa punkty, które oznaczymy jako $(0,0)$ i $(1,0)$. Punkty te uważamy za skonstruowane, wyznaczają one pewien standardowy układ współrzędnych na płaszczyźnie. Przypuśćmy indukcyjnie, że skonstruowaliśmy pewien skończony zbiór P punktów płaszczyzny. Nowy punkt konstruujemy przecinając dwie linie, z których każda jest prostą prowadzoną przez dwa różne punkty z P lub okręgiem o środku w zbiorze P i o promieniu równym odległości między dwoma różnymi punktami zbioru P.

Powiemy, że liczba rzeczywista jest konstruowalna, jeśli można skonstruować punkt, który ma ją za współrzędną. Fakt, że układ dwóch równań, z których każde jest liniowe lub kwadratowe, można rozwiązać przy użyciu czterech działań i $\sqrt{\ }$, znajduje odzwierciedlenie w następującym stwierdzeniu: *Jeśli liczba rzeczywista x jest konstruowalna, to istnieje taki skończony ciąg ciał*

$$(*) \qquad K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n \,,$$

że $K_{i+1} = K_i(\sqrt{c_i})$ dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $K_0 = \mathbf{Q}$, $x \in K_n$. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne, które jednak tu nie będzie nam potrzebne. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. *Jeśli wielomian $x^3 + px + q$ ($p, q \in \mathbf{Q}$) nie ma pierwiastków wymiernych, to żaden jego pierwiastek rzeczywisty nie jest konstruowalny.*

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i równanie

$$(**) \qquad x^3 + px + q = 0$$

ma pewne rozwiązanie rzeczywiste, konstruowalne i że K_n w ciągu $(*)$ jest najmniejszym ciałem zawierającym jakiekolwiek takie rozwiązanie. Oznaczymy je przez $x = a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in K_{n-1}$, $c > 0$, $\sqrt{c} \notin K_{n-1}$. Równanie $(**)$ przepiszemy w postaci

$$A + B\sqrt{c} = 0 \,,$$

gdzie $A = a^3 + 3ab^2c + pa + q$, $B = 3a^2b + b^3c + pb$. Oczywiście, $A, B \in K_{n-1}$. Gdyby $B \neq 0$, to $\sqrt{c} = -\frac{A}{B} \in K_{n-1}$. Zatem (i) $B = 0$ oraz (ii) $A = 0$. Z (i) wyznaczamy $b^2c = -3a^2 - p$ i podstawiamy do (ii) otrzymując $-8a^3 - 2pa + q = 0$. Liczba $y = -2a$ należy do K_{n-1} i spełnia równanie $(**)$, co przeczy minimalności K_n.

Powróćmy teraz do Australii. Założymy, że wierzchołki naszego siedmiokąta są pierwiastkami wielomianu $z^7 - 1$ w $\mathbf{C}$. Jeśli $z^7 = 1$ oraz $z \neq 1$, to

$$0 = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = \sum_{k=0}^{6} z^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{3} (z^k + \bar{z}^k) = -1 - 2r + r^2 + r^3 \,,$$

gdzie $r = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$. Podstawiając $r = \frac{x-1}{3}$ otrzymujemy, że $x^3 - 21x - 7 = 0$. Dzielniki wyrazu wolnego wielomianu z lewej strony tego równania nie są jego pierwiastkami, więc nie ma on pierwiastków wymiernych. Z Twierdzenia 1 wynika, że liczba x nie jest konstruowalna, a zatem $\mathrm{Re}(z) = \frac{x-1}{6}$ też nie jest konstruowalna (dlaczego?) i punktu z nie można skonstruować.

Dariusz MIKLASZEWSKI

Wizualizacja matematyki

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.