Dwuwymiarowy Wszechświat

Otaczająca nas przestrzeń jest wprawdzie trójwymiarowa, nic jednak nie stoi na przeszkodzie w rozważeniu modelu dwuwymiarowego Wszechświata, najprostszego z możliwych, to znaczy newtonowskiego. Ponieważ o makroskopowej budowie Wszechświata decydują siły grawitacji, zastanówmy się nad dwuwymiarowym prawem powszechnego ciążenia.

Najpierw znajdziemy potencjał grawitacyjny masy punktowej. Jest on rozwiązaniem równania Laplace'a

$$\Delta V(r) = 0$$

dla $r > 0$ (r oznacza odległość punktu od masy punktowej m). Jest to prawda niezależnie od wymiaru przestrzeni, natomiast rozwiązanie tego równania już od wymiaru zależy. Zamiast rozwiązywać równanie różniczkowe możemy sformułować problem w równoważnej, lecz prostszej postaci. Natężenie pola grawitacyjnego, $\vec{\gamma} = -\nabla V$, spełnia prawo Gaussa mówiące, że strumień pola grawitacyjnego przez zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do całkowitej masy znajdującej się wewnątrz tej powierzchni. W przypadku, gdy istnieje symetria, pozwala to niekiedy obliczyć natężenie pola. Jako zamkniętą powierzchnię wybierzmy sferę o promieniu r, w środku której znajduje się masa m. Strumień pola przez powierzchnię tej sfery jest równy γS, gdzie S jest polem powierzchni. Możemy więc zapisać prawo Gaussa w postaci

$$\gamma S = km\,,$$

gdzie k jest pewną stałą. W dwuwymiarowym przypadku tą sferą jest okrąg, a polem powierzchni jego długość. Tak więc

$$\gamma = \frac{km}{2\pi r}$$

w dwóch wymiarach, oraz $\gamma = \frac{km}{4\pi r^2}$ w trzech wymiarach. Kierunek natężenia pola jest radialny. Wielkość $G = \frac{k}{4\pi}$ w trójwymiarowym Wszechświecie nosi nazwę stałej grawitacji. Przez analogię możemy wprowadzić także dwuwymiarową stałą grawitacji. Znając natężenie pola, możemy łatwo znaleźć potencjał. W przypadku trójwymiarowym jest to doskonale wszystkim znany potencjał $-\frac{Gm}{r} + c$, natomiast w przypadku dwuwymiarowym otrzymujemy

$$V(r) = Gm \ln \frac{r}{r_0}\,.$$

Obie stałe c i r_0 są określone przez wybór miejsca, gdzie potencjał znika. Logarytmiczna zależność potencjału od odległości ma nieoczekiwaną konsekwencję; ponieważ logarytm jest funkcją nieograniczoną, druga prędkość kosmiczna w dwuwymiarowym Wszechświecie jest nieskończona. Tak więc każde ciało obdarzone masą jest laplasowską czarną dziurą!

Także potencjał elektrostatyczny w dwuwymiarowym Wszechświecie zmienia się logarytmicznie. Energia jonizacji dwuwymiarowego atomu wodoru byłaby nieskończona, zupełnie inne byłoby jego widmo. W konsekwencji całkiem inna byłaby dwuwymiarowa fizyka, chemia i biologia. Takie dwuwymiarowe życie (gdyby istniało) musiałoby rządzić się odmiennymi prawami. Ale to już zbyt daleko idące spekulacje...

Krzysztof REJMER

Rozwiązanie zadania F 424. Kiedy lina już się oderwie od pręta, prędkość i przyspieszenie tego jej fragmentu, który porusza się w górę, stają się większe od prędkości i przyspieszenia fragmentu poruszającego się w dół. W konsekwencji punkt zgięcia liny zaczyna się poruszać w górę. Równania ruchu mają postać

$$\frac{1}{2}\varrho(L + x_1 + x_2)\ddot{x}_1 = \frac{1}{2}\varrho g(L + x_1 + x_2) - T\,,$$

$$\frac{1}{2}\varrho(L - x_1 - x_2)\ddot{x}_2 = T - \frac{1}{2}\varrho g(L - x_1 - x_2)\,.$$

Zgięcie liny możemy potraktować jako impuls falowy poruszający się z prędkością $\frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$. Prędkość fali rozchodzącej się w strunie o gęstości ϱ i naprężeniu T jest równa $\sqrt{T/\varrho}$, zatem

$$T = \frac{1}{4}\varrho(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\,.$$

Przepiszmy równania ruchu w postaci

$$(L + R)\ddot{x}_1 = g(L + R) - \frac{1}{2}\dot{R}^2\,,$$

$$(L - R)\ddot{x}_2 = g(L - R) + \frac{1}{2}\dot{R}^2\,,$$

gdzie $R = x_1 + x_2$. Pierwsze równanie mnożymy przez $L - R$, drugie przez $L + R$ i dodajemy je stronami, skąd

$$(L^2 - R^2)\ddot{R} = \dot{R}^2 R\,,$$

co jest równoważne równaniu

$$(L^2 - R^2)\dot{R}^2 = \alpha^2 = \mathrm{const}\,.$$

Wartość stałej α wyznaczamy z warunku początkowego

$$x_1 = x_2 = \frac{L}{2\sqrt{2}} \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{Lg}\,.$$

Stąd

$$\alpha = \sqrt{\frac{gL^3}{2}}\,.$$

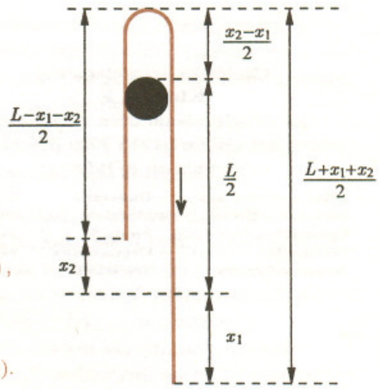
Całkując równanie

$$\sqrt{L^2 - R^2}\,\dot{R} = \sqrt{\frac{gL^3}{2}}$$

od $t_0 = 0$ do t_k (czyli do chwili, gdy lina jest wyprostowana, a więc $R = L$) dostajemy

$$t_k = \sqrt{\frac{L}{8g}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

(jeśli $L = 1$, to $t_k = 0{,}43$ s).



Położenie środka masy jest równe

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{R^2}{4L} - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\,,$$

czyli

$$\ddot{x}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2L}(\dot{R}^2 + R\ddot{R}) - \frac{1}{2}(\ddot{x}^2 - \ddot{x}_1)\,.$$

Z równań ruchu otrzymujemy

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -2g + \frac{1}{L}(\dot{R}^2 + R\ddot{R})\,,$$

czyli

$$\ddot{x}_{\mathrm{CM}} = g$$

(środek masy spada swobodnie).
Zatem

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{8}L + \sqrt{\frac{gL}{8}}t + \frac{1}{2}gt^2$$

(w chwili gdy lina odrywa się od pręta $x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{8}L$, $\dot{x}_{\mathrm{CM}} = \frac{R\dot{R}}{2L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gL}{2}}$). Znając x_{CM} oraz R wyznaczamy x_1 oraz x_2

$$x_1 = x_{\mathrm{CM}} + \frac{R}{2} - \frac{R^2}{4L} \qquad x_2 = -x_{\mathrm{CM}} + \frac{R}{2} + \frac{R^2}{4L}$$

W chwili t_k mamy $x_{\mathrm{CM}} = \frac{L}{16}\left(\frac{\pi^4}{4} + 1\right) \approx 0{,}217L$

$$x_1 = \frac{L}{16}\left(5 + \frac{\pi^2}{4}\right) \approx 0{,}467L \text{ (0,967 } L \text{ poniżej pręta)}$$

$$x_2 = \frac{L}{16}\left(11 - \frac{\pi^2}{4}\right) \approx 0{,}533L \text{ (0,033} L \text{ powyżej pręta)}.$$

Z równania względem x_1 oraz x_2, a także z równania $\sqrt{L^2 - R^2} = \sqrt{\frac{gL^3}{2}}$ dostajemy

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{\mathrm{CM}} + \sqrt{\frac{gL}{8} - \frac{L - R}{L + R}}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_{\mathrm{CM}} + \sqrt{\frac{gL}{8} - \frac{L + R}{L - R}}\,,$$

gdzie $x_{\mathrm{CM}} = \sqrt{\frac{gL}{8}} + gt$. Podstawiając wartości t_k oraz L w miejsce R dostajemy, że $\dot{x}_1$ w końcowej chwili jest $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{gL}{2}}$. Warto zauważyć, że gdy $t \to t_k$ ($R \to L$), to prędkość końca poruszającego się do góry dąży do nieskończoności, jednocześnie maleje jego masa, tak że energia kinetyczna pozostaje skończona.