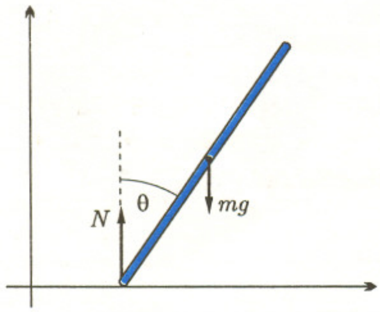
Zadania

Redaguje Krzysztof REJMER



Rys. 1

F 421. Poniższy problem stał się przedmiotem zakładu pomiędzy Frankiem S. Crawfordem (autorem znakomitego podręcznika „Fale" z berkeleyowskiego kursu fizyki) a słynnym fizykiem, który pozostał anonimowy. Zakład został wygrany przez Crawforda.

Jednorodny pręt o masie m i długości $2R$ postawiono na gładkim podłożu odchylając o kąt Θ_0 od pionu, a następnie puszczono swobodnie. Środek masy pręta porusza się z przyspieszeniem o stałej składowej pionowej. Oto dowód. Równania ruchu mają postać (rys. 1):

(1) $m\ddot{z} = N - mg$, pionowa składowa przyspieszenia ;

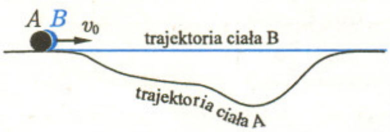
(2) $I\ddot{\Theta} = NR\sin\Theta$, obrót wokół środka masy ;

(3) $(I + mR^2)\ddot{\Theta} = mgR\sin\Theta$, obrót wokół punktu podparcia.

N jest siłą reakcji podłoża, $I = \frac{1}{3}mR^2$ momentem bezwładności względem środka masy.

Dzieląc stronami równania (2) i (3) dostajemy $N = \dfrac{1}{4}mg$, podstawiając to do równania (1) dostajemy $\ddot{z} = -\dfrac{3}{4}g$. Czy powyższy dowód jest poprawny? Jeśli nie, to dlaczego?

Rozwiązanie na str. 6

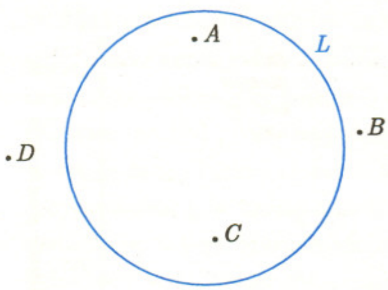


Rys. 2

F 422. Dwa ciała A i B startują z prędkością v_0 każde i poruszają się bez tarcia po płaskowyżu, w którym znajduje się dolina (rys. 2). Pierwsze ciało (A) porusza się wzdłuż profilu doliny pod działaniem siły grawitacji. Zakładamy, że profil doliny jest wystarczająco łagodny, by ciało A nie podskakiwało i nie zahaczało o nierówności. Dno doliny, podobnie jak płaskowyż, jest gładkie. Drugie ciało (B) porusza się prostoliniowo ze stałą prędkością. Które ciało szybciej znajdzie się po drugiej stronie doliny?

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ



Rys. 3

M 762. Na płaszczyźnie dane są koła K i L oraz czworokąt wypukły $ABCD$ (rys. 3). Wiedząc, że $\{B, D\} \subset K$ oraz $\{A, B, C, D\} \cap L = \{A, C\}$, udowodnić, że $\{A, C\} \cap K \neq \emptyset$.

Rozwiązanie na str. 5

M 763. Czy istnieje zmienna losowa Z o wartościach rzeczywistych i takie funkcje $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, że zmienne losowe $f(Z)$ i $g(Z)$ są niezależne, lecz nie stałe? (Mówimy, że rzeczywiste zmienne losowe X i Y są niezależne, jeśli dla dowolnych przedziałów $I, J \subset \mathbf{R}$ zachodzi równość $P(X \in I \wedge Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$.)

Rozwiązanie na str. 7

M 764. Czy płaski przekrój sześcianu może być pięciokątem foremnym?

Rozwiązanie na str. 7

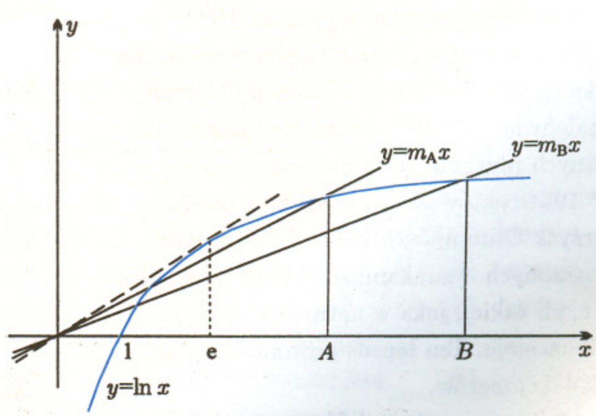
Matematyczne miniatury

Przykład 4

Jeżeli $e \le A < B$, to $A^B > B^A$. Wynika to z następującej obserwacji (rysunek)

$$(e \le A < B) \Rightarrow (m_A > m_B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\ln A}{A} > \frac{\ln B}{B}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A^B > B^A).$$

Stąd, na przykład, $e^\pi > \pi^e$.



Ciąg dalszy na str. 16.