Jak wyznaczyć stałą grawitacji?

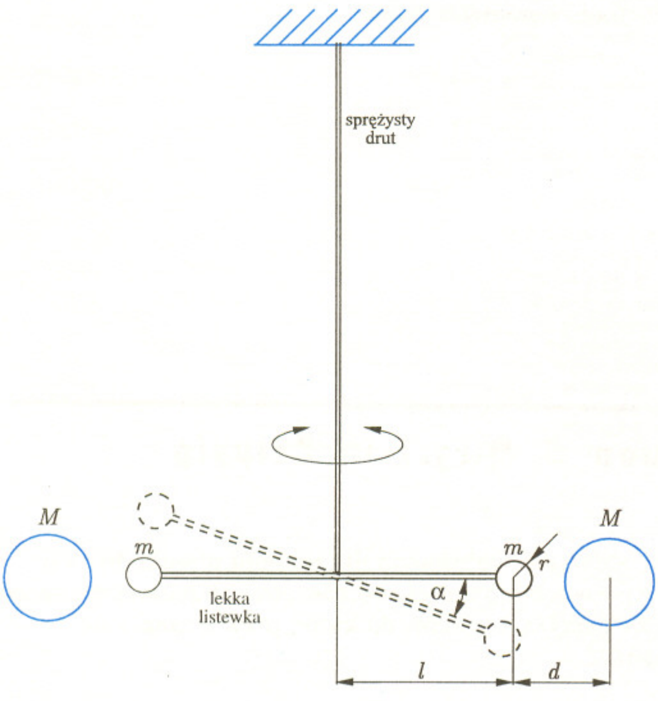
Stanisław BEDNAREK

Oddziaływanie grawitacyjne jest zapewne najbardziej uniwersalnym i tajemniczym oddziaływaniem w przyrodzie. Jego natura i związki z innymi rodzajami oddziaływań są wciąż jeszcze nie do końca wyjaśnione. Z lekcji fizyki pamiętamy, że każde dwa ciała przyciągają się wzajemnie siłą grawitacji. Dla ciał punktowych albo dla ciał o masie rozłożonej kulisto symetrycznie wartość F_g tej siły wyraża się wzorem podanym przez Newtona

(1) $$F_g = \frac{GMm}{x^2},$$

w którym M i m są masami ciał, x – odległością między ich środkami, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ – stałą grawitacji. Bardzo mała wartość tej stałej powoduje, że zaobserwowanie skutków działania sił grawitacji między ciałami znajdującymi się w naszym najbliższym otoczeniu, np. między leżącymi na stole książkami, jest bardzo trudne. W ciągu ostatnich 200 lat fizycy poświęcili wiele wysiłku coraz dokładniejszemu wyznaczaniu wartości stałej G. Okazuje się jednak, że dobierając odpowiednie warunki można prostymi środkami wykonać doświadczenie pozwalające przynajmniej na oszacowanie wartości tej stałej.

Rozpatrzmy w tym celu układ przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1

Dwie jednakowe kulki o masach m każda umieszczone są na końcach lekkiej i sztywnej listewki zawieszonej w połowie długości na pionowym sprężystym drucie. Układ ten to tzw. wahadło torsyjne. Po skręceniu listewki o niewielki kąt wykonuje ono drgania harmoniczne proste o okresie T_1 danym wzorem

(2) $$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_{ks}}}.$$

M_{ks} oznacza tutaj moment kierujący zdefiniowany jako stosunek momentu sił sprężystości skręconego drutu M_s do kąta odchylenia listewki α

(3) $$M_{ks} = \frac{M_s}{\alpha},$$

I jest momentem bezwładności układu względem osi drutu.

Pomijając masę drutu i listewki oraz korzystając ze wzoru Steinera obliczamy moment bezwładności wahadła

(4) $$I = 2m(l^2 + \frac{2}{5}r^2),$$

gdzie l oznacza odległość środka kulki od osi drutu, a r – promień kulki.

Jeżeli naprzeciw położenia równowagi kulek zostaną umieszczone dwie nieruchome kule o masach M każda, to wskutek ich przyciągania grawitacyjnego z kulkami powstanie dodatkowy moment sił M_g, a okres drgań T_2 będzie krótszy i wyrazi się wzorem

(5) $$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_{ks} + M_{kg}}},$$

w którym

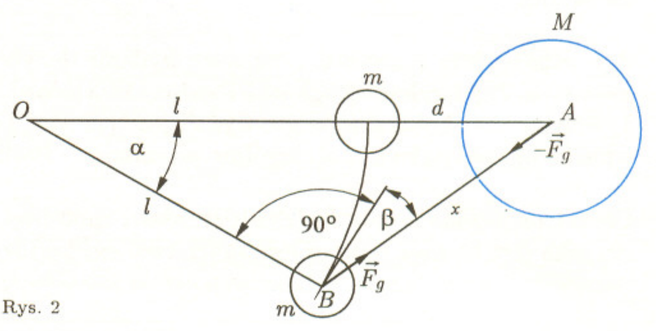
(6) $$M_{kg} = \frac{M_g}{\alpha}.$$

Podnieśmy równania (2) i (5) do potęgi minus drugiej i odejmijmy stronami. Otrzymamy wówczas

(7) $$\frac{M_{kg}}{I} = 4\pi^2\left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right).$$

W ten sposób uniezależniliśmy się od kłopotliwego wyznaczenia momentu kierującego sił sprężystości drutu M_{ks}.

Zajmijmy się teraz momentem kierującym sił grawitacji M_{kg}.



Rys. 2

Na podstawie rysunku 2 oraz wzorów (1) i (6) otrzymujemy

$$M_{kg} = \frac{2}{\alpha}\frac{\mathrm{G}Mm}{x^2} l \cos\beta . \tag{8}$$

Zastosujemy twierdzenie sinusów dla trójkąta OAB

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{l+d}{\sin(90^\circ+\beta)}, \tag{9}$$

gdzie d oznacza odległość między środkami kul ruchomych i nieruchomych w położeniu równowagi. Uwzględniając, że $\sin(90^\circ+\beta) = \cos\beta$, ze wzoru (9) otrzymujemy

$$\cos\beta = \frac{l+d}{x}\sin\alpha \tag{10}$$

i podstawiamy to wyrażenie do wzoru (8). Wówczas

$$M_{kg} = \frac{2\mathrm{G}Mml(l+d)}{x^3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{11}$$

Ponieważ kąt α jest mały, możemy przyjąć przybliżenia $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz $x \approx d$, co bardzo uprości dalsze obliczenia. Wtedy

$$M_{kg} \approx \frac{2\mathrm{G}Mml(l+d)}{d^3}. \tag{12}$$

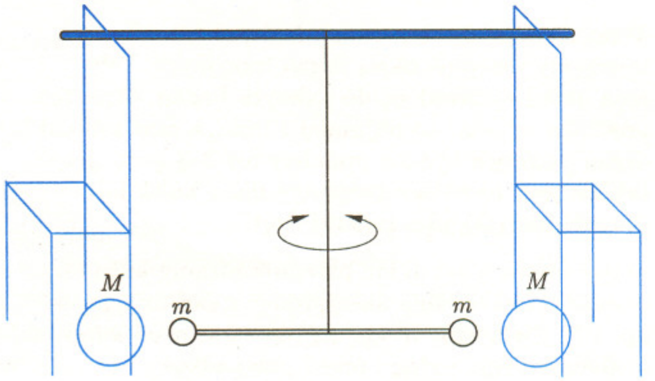
Pozostało nam jeszcze podstawienie otrzymanych wzorów na M_{kg} oraz I – wzory (11) i (4) – do równania (7) i wyznaczenie stąd G. W wyniku tego otrzymujemy

$$\mathrm{G} \approx \frac{4\pi^2 d^3(l^2+\frac{2}{5}r^2)}{Ml(l+d)}\left(\frac{1}{T_2^2}-\frac{1}{T_1^2}\right). \tag{13}$$

Warto zauważyć, że do wyznaczenia G nie musimy znać wartości mas m kulek zamocowanych na listewce.

Wygląd układu pomiarowego przedstawia rysunek 3. Kij od szczotki albo inny sztywny pręt o grubości 1,5–2 cm i długości około 1,5 m przywiązujemy do oparć dwóch krzeseł rozstawionych na odległość około 1 m. Drewnianą listewkę o grubości 6–8 mm i długości 50–70 cm przywiązujemy w połowie długości do pręta za pomocą kawałka sprężystego drutu o średnicy 0,3–0,5 mm i długości 60–80 cm. Dobrze nadaje się do tego drut ze starego opornika drutowego albo cienka struna do instrumentów muzycznych. Na końce listewki wciskamy uformowane z plasteliny kule o promieniu 3–4 cm. Jeżeli jeden koniec listewki opada w dół, to dodajemy nieco plasteliny do kuli na przeciwległym końcu, tak żeby listewka przyjęła pozycję poziomą.

Zrównoważoną listewkę pozostawiamy w spokoju, aż ustaną wszystkie drgania układu, w szczególności drgania torsyjne spowodowane przypadkowymi skręceniami drutu. Może to trwać kilkadziesiąt minut, a nawet dłużej. Następnie bardzo ostrożnie skręcamy listewkę w płaszczyźnie poziomej o kąt 15–20°. Jeżeli oprócz drgań torsyjnych wzbudziły się inne drgania, np. wahania w płaszczyźnie pionowej, to czekamy, aż ulegną one wytłumieniu.



Rys. 3

W artykule Stanisława Bednarka „Jak wyznaczyć stałą grawitacji?" omawiany jest problem pomiaru wartości stałej grawitacji. Chociaż upłynęło ponad 300 lat od sformułowania teorii grawitacji przez Newtona, wartość tej stałej nie jest znana ze zbyt dużą dokładnością. Obecnie akceptowana wartość $\mathrm{G} = 6{,}67259(85) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ (błąd wynosi 0,128 promila) jest oparta na pomiarach przeprowadzonych 15 lat temu przez Gabriela Luthera z Laboratorium w Los Alamos. Dla porównania, stała Fermiego G_F oddziaływań słabych (odpowiedzialnych np. za rozpad β neutronu) jest znana z lepszą precyzją – jej wartość wynosi $\mathrm{G_F}/(\hbar c)^3 = 1{,}16639(2) \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV^{-2}}$, a błąd jest 0,02 promila.

W 1995 r. na konferencji Amerykańskiego Towarzystwa Fizycznego i Amerykańskiego Związku Nauczycieli Fizyki przedstawiono wyniki trzech nowych niezależnych pomiarów stałej grawitacji.

Tim Armstrong i Mark Fitzgerald z Laboratorium Standardów Pomiarowych w Nowej Zelandii uzyskali wynik 6,6659, a więc 0,1% poniżej obecnie akceptowanej wartości. Grupa z Uniwersytetu w Wuppertalu, RFN, kierowana przez Heinricha Meyera, otrzymała wynik 6,6685 – również poniżej obecnej wartości. Trzeci wynik, uzyskany przez grupę pod kierunkiem Winfrieda Michaelisa z Federalnego Instytutu Fizyko-Technicznego w Brunszwiku, jest wyższy i wynosi 6,71540.

Jak na pomiar wartości jednej z fundamentalnych stałych przyrody sytuacja nie jest zadowalająca. Niestety, na razie nie potrafimy wyjaśnić rozbieżności uzyskanych wyników. Być może są one spowodowane wpływem obiektów znajdujących się w otoczeniu układów pomiarowych. Gabriel Luther wspomina, że gdy przeprowadzał pomiar blisko ściany zewnętrznej laboratorium, to padający na zewnątrz deszcz miał wpływ na wynik pomiarów.

J.K.

Teraz za pomocą stopera, najlepiej elektronicznego, mierzymy wstępnie okres drgań torsyjnych. Żeby nasz układ nadawał się do dalszych badań, okres ten powinien wynosić co najmniej 1 min., a czas zaniku drgań powinien być nie mniejszy niż 2–3 godz. Jeżeli tak nie jest, to należy zwiększyć masy kulek lub długość listewki albo zmienić drut.

Mając odpowiedni układ przeprowadzamy kilka razy pomiar czasu trwania dużej liczby drgań torsyjnych, np. 100. Zwracamy uwagę na powtarzalność wyników i zabezpieczenie układu przed przypadkowymi zakłóceniami – podmuchami powietrza i wstrząsami. Ponieważ pomiary te będą trwały kilka godzin, dobrze jest skorzystać z pomocy innej osoby mierzącej czasy na zmianę. Upewniwszy się o powtarzalności wyników i braku zakłóceń, obliczamy średni okres drgań T_1.

Następnie w pobliżu plastelinowych kul, znajdujących się w położeniu równowagi, należy umieścić na podłodze lub na odpowiednich podstawkach dwa jednakowe ciała o masach co najmniej kilku kg każde. Najlepiej, żeby były to pojedyncze stalowe kule. Na przykład, kule używane w sporcie mają zwykle masę 5 lub 7,5 kg. Zamiast nich możemy wykorzystać odpowiednie odważniki, a w ostateczności kilka cegieł lub kamieni. Podobnie jak poprzednio, powtarzamy pomiary i obliczamy średni okres drgań T_2. Jeżeli okaże się on o kilka setnych sekundy krótszy od T_1, to mamy prawo do umiarkowanego optymizmu.

Pozostaje jeszcze określenie wartości mas M i zmierzenie występujących we wzorze (13) wielkości d, l, r oraz obliczenie wartości G. Ze względu na przyjęte uproszczenia i niedokładność użytych przyrządów otrzymanie prawidłowego dla G wyniku rzędu wielkości 10^{-11} możemy uznać za sukces naszego doświadczenia.

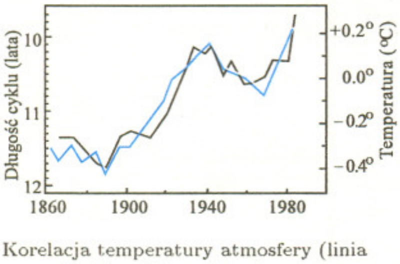
Tym, którzy chcieliby dowiedzieć się więcej o metodach i historii wyznaczania stałej grawitacji, warto polecić fragment pasjonującej książki A.K. Wróblewskiego i J.A. Zakrzewskiego *Wstęp do fizyki*, T. 2, cz. 2, s. 317–330.

Patrz w niebo

Od dawna podejmowane są próby wykrycia rozmaitych subtelnych oddziaływań Słońca na Ziemię. Najważniejsze oddziaływanie znamy: Słońce nas nieustannie ogrzewa i oświetla. Nasuwają się jednak pytania, np. czy na tym koniec, albo czy to ogrzewanie i oświetlanie jest niezmienne.

Wiadomo, że na te pytania odpowiedzi są negatywne. Słońce przede wszystkim przechodzi 11-letni cykl aktywności (a jeśli śledzić biegunowość pola magnetycznego w plamach, to 22-letni). Czy wywołuje to jakieś efekty na Ziemi? Oczywiście, np. wyrzucane ze Słońca w okresie maksimum aktywności strumienie szybkich cząstek powodują wzrost występowania zórz polarnych i burz magnetycznych. Prawdopodobnie w rytmie cyklu słonecznego zmienia się też tempo przyrastania pni drzewnych, ale wszystko to są efekty słabo przemawiające do wyobraźni przeciętnego człowieka, który chciałby zapewne wiedzieć, czy plamy słoneczne mają wpływ na klimat lub na zdrowie ludzi. Niestety, aktywność słoneczna śledzona jest zbyt krótko, a dane o klimacie w przeszłości są wysoce niekompletne. Wreszcie nie całkiem na poważnie można doszukiwać się wpływu Słońca na historię powszechną. Na przykład, maksima aktywności były około 1789 r. (Rewolucja Francuska), 1848 r. (Wiosna Ludów), 1917 r. (Rewolucja Październikowa), 1939 r. (wybuch II wojny światowej), ale wybuch I wojny (1914 r.) przypadł na minimum. Szwejk był zdania, że plamy mają jednak znaczenie, bo gdy kiedyś jedna się pojawiła, to jeszcze tego samego dnia został obity w pewnej piwiarni.

Daty maksimów słonecznych:
1750
1760
1770
1780
1790
1803
1817
1829
1839
1849
1860
1871
1882
1893
1907
1918
1929
1939
1949
1959
1970
1980
1991



Korelacja temperatury atmosfery (linia czarna) z długością cyklu słonecznego (linia kolorowa).

Na tym tle wręcz niezwykłe jest dokonane kilka lat temu odkrycie duńskich meteorologów. Znaleźli oni mianowicie związek między średnią temperaturą atmosfery a długością cyklu słonecznego. Cykle te bowiem średnio wynoszą 11 lat, ale ich zakres wynosi od 9,7 lat do 11,8 lat. Okazało się, że zachodzi nadspodziewanie silna korelacja: im krótszy cykl, tym jest cieplej (rys.) – przynajmniej w ciągu ostatnich 200 lat. Tu warto przypomnieć, że im bardziej Słońce jest zaplamione, tym więcej wysyła energii, gdyż wprawdzie plamy blokują część emitowanego światła, ale jednocześnie towarzyszące plamom pochodnie pokrywają ten ubytek energii z nadwyżką. Może właśnie dlatego zachodzi odkryta korelacja. Sprawa jest zbyt nowa, by wyciągać ostateczne wnioski, a samo zjawisko może mieć duże znaczenie w badaniach np. ewentualnego efektu cieplarnianego wywołanego działalnością człowieka.

Tomasz KWAST