epsilon
2/96
(59)

Dorysowywanie (2)

W poprzednim *EPSILONIE* była mowa o tym, jak pomocne przy rozwiązywaniu zadań z geometrii elementarnej może być dorysowywanie. Metodą tą można też udowodnić rozmaite, znane twierdzenia geometryczne. Oto trzy przykłady:

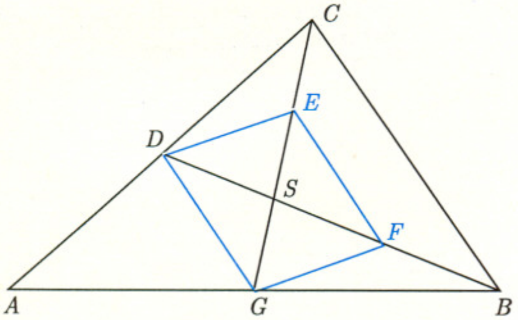
– *trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie; punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku* $2:1$*;*

– *odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw;*

– *trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.*

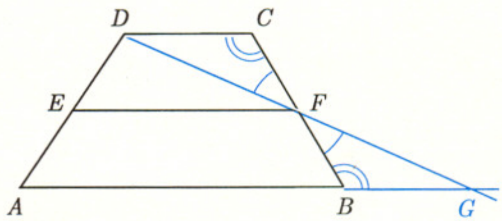
Oprócz odpowiednich rysunków konieczna jest też znajomość pewnych twierdzeń. Będziemy korzystać, na przykład, z takiego faktu: odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest dwa razy mniejsza od długości trzeciego boku (nazwijmy go: twierdzenie o linii środkowej trójkąta).

Dowód twierdzenia o środku ciężkości może wyglądać tak. Narysujmy trójkąt ABC i dwie jego środkowe BD i CG przecinające się w punkcie S (rys. 1). W trójkącie CSB środki boków CS i BS oznaczmy E i F. Zauważmy, że w trójkącie ABC odcinek DG jest równoległy do odcinka BC i równy jego połowie, a w trójkącie CSB odcinek EF jest też równoległy do odcinka BC i także równy połowie jego długości. Czworokąt $DEFG$ jest równoległobokiem, zatem przekątne jego przecinają się w połowie, co daje nam równość odcinków DS i SF. Z konstrukcji rysunku wiemy, że odcinki SF i FB są równe. Wykazaliśmy podział odcinka BD punktem S w stosunku $2:1$. Analogicznie można wykazać podział pozostałych par środkowych. Istnieje tylko jeden punkt dzielący odcinek w stosunku $2:1$, czyli wszystkie środkowe przecinają się w jednym punkcie.



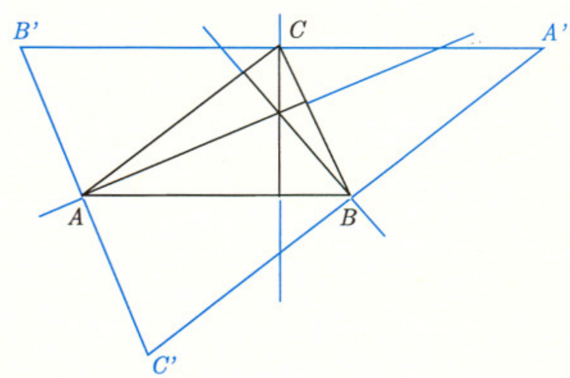
Rys. 1

Dla dowodu twierdzenia o linii środkowej w trapezie $ABCD$ (środki ramion oznaczmy E i F) narysujmy trójkąt, którego dwa wierzchołki to A i D, trzeci to punkt przecięcia półprostych AB i DF – oznaczmy go przez G (rys. 2). Zauważmy, że trójkąty DFC oraz FGB są przystające (równe są odcinki CF i FB, kąty DFC, BFG oraz DCF, FBG). Przystawanie tych trójkątów daje nam równość boków DF i FG, skąd wynika, że odcinek EF jest linią środkową w trójkącie ADG. Odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu, długość odcinka EF równa jest połowie długości odcinka AG, ten zaś równy sumie długości $AB + DC$ ($BG = DC$ jako odpowiednie boki przystających trójkątów). I mamy już gotowy dowód.



Rys. 2

Udowodnijmy trzecie wymienione twierdzenie. Mamy dany trójkąt ABC. Poprowadźmy proste równoległe do boków trójkątów przechodzące przez przeciwległe wierzchołki – powstanie nowy trójkąt $A'B'C'$. Tak otrzymany rysunek (rys. 3) to cztery przystające trójkąty (z równoległości prostych wynika równość odpowiednich kątów w trzech dorysowanych trójkątach i wyjściowym; ponieważ trójkąty te mają parami wspólne boki, to wszystkie cztery trójkąty są przystające). Zakończmy dowód – wysokości trójkąta ABC są, oczywiście, zawarte w symetralnych odpowiednich boków trójkąta $A'B'C'$, które to przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 3

Dla drobiazgowych Czytelników propozycja: Ile razy w powyższych dowodach użyto aksjomatu Euklidesa, czy korzystanie z niego zawsze było konieczne?

Danuta CIESIELSKA

Anegdoty egzaminacyjne

Ongiś pewien matematyk na wykładzie sformułował twierdzenie, mówiące o tym, że dwie własności są równoważne. Udowodnił jedną z implikacji, o drugiej zaś powiedział: „a w drugą stronę to jest oczywiste". Studenci, rzecz jasna, ze zrozumieniem pokiwali głowami.

Do egzaminu studenci zaczęli się przygotowywać (tradycyjnie) dopiero wtedy, gdy zbliżała się sesja. I wówczas nikomu nie udało się nie tylko stwierdzić, dlaczego implikacja jest oczywista, ale nawet tego, dlaczego jest prawdziwa. Egzamin był zaś tak blisko, że nie wypadało pójść do wykładowcy i poprosić go o wyjaśnienie. W efekcie nikt odpowiedniego dowodu nie umiał.

Tak się jednak zdarzyło, że na egzaminie jeden ze studentów został zapytany o to właśnie nieszczęsne twierdzenie. Przeprowadził sprawnie dowód w jedną stronę, po czym (bo cóż miał robić?) rzekł: „a druga implikacja jest oczywista".

Profesor głęboko się zastanowił, myślał przez dłuższą chwilę...

– Tak, ma pan rację.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.