Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1996

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 299 (WT=1,77) i 300 (WT=2,06) z numeru 4/1995

Janusz Olszewski	– Suwałki	44,62
Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,33
Piotr Lipiński	– Radom	37,82
Lesław Skrzypek	– Rzeszów	37,19
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	36,66
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	35,69
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	35,10

Z panem Olszewskim matematyczny **Klub 44** liczy szesnastu Weteranów.

Zadania z matematyki nr 313, 314

Redaguje Marcin E. KUCZMA

313. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:
$$x_0 = \pi/3, \qquad x_{n+1} = x_n \cos x_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots .$$
Wykazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^3$ jest zbieżny i że jego suma jest liczbą mniejszą od 7/3.

314. Na płaszczyźnie dane są dwa kwadraty $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$, jednakowo zorientowane oraz położone tak, że $A_1 \neq A_2$, $C_1 \neq C_2$. Udowodnić, że proste A_1A_2 i C_1C_2 są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $|B_1B_2| = |D_1D_2|$.

Zadanie **314** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1995

Przypominamy treść zadań:

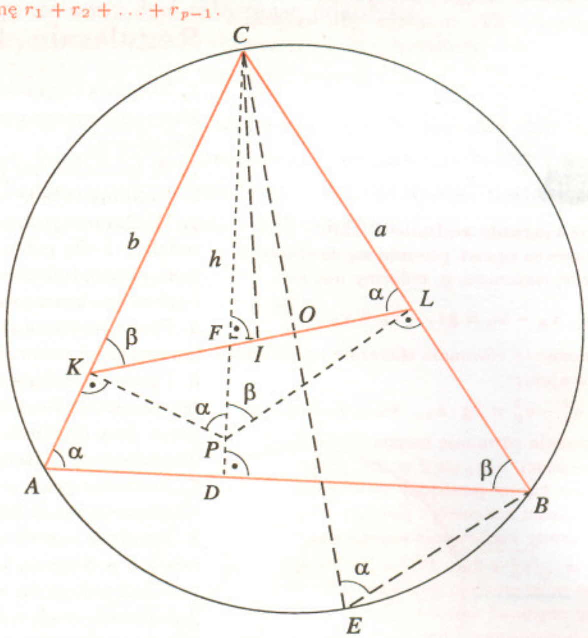
305. Wysokość CD trójkąta ostrokątnego ABC ma długość h; punkty O oraz I są środkami okręgów opisanego (o promieniu R) oraz wpisanego (o promieniu r). Punkt P, leżący na odcinku CD, ma tę własność, że prosta wyznaczona przez jego rzuty na boki AC i BC przechodzi przez punkty O oraz I.

(**a**) Znaleźć związek między liczbami R, r, h.
(**b**) Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość stosunku $|CP| : h$.

306. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Dla $k = 1, 2, \ldots, p-1$ oznaczmy przez r_k resztę z dzielenia liczby k^p przez p^2. Obliczyć sumę $r_1 + r_2 + \ldots + r_{p-1}$.

305. (a) Oznaczmy przez K i L rzuty punktu P na boki AC i BC, a przez E – koniec średnicy CE okręgu opisanego na trójkącie ABC. Przyjmijmy też zwykłe oznaczenia: $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$. Zachodzą równości:
$$|\angle OCL| = |\angle OCB| = 90^\circ - |\angle BEC| = 90^\circ - |\angle BAC| = 90^\circ - \alpha .$$
Na czworokącie $CKPL$ da się opisać okrąg; zatem
$$|\angle OLC| = |\angle KLC| = |\angle KPC| = 90^\circ - |\angle KCP| = \alpha .$$
Trójkąt COL jest więc prostokątny: $CO \perp OL$.

Oznaczmy przez F rzut punktu I na prostą CD. Skoro
$$|\angle FCK| = |\angle DCA| = 90^\circ - \alpha = |\angle OCL| ,$$
zatem dwusieczna CI kąta ACB jest zarazem dwusieczną kąta OCF. Wobec tego trójkąty prostokątne COI i CFI są przystające i otrzymujemy
$$h = |CD| = |CF| + |FD| = |CO| + |FD| = R + r ;$$
jest to szukany związek.



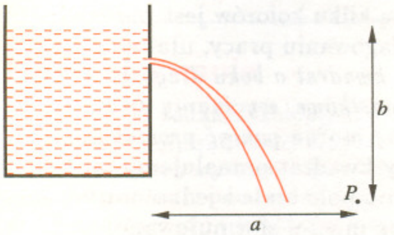
(b) Z równości $|\angle OLC| = \alpha$, $|\angle LPC| = 90^\circ - |\angle LCP| = \beta$ wnosimy, że
$$h = a \sin\beta = 2R \sin\alpha \sin\beta = 2R \cdot \frac{|CL|}{|CP|} \cdot \frac{|CO|}{|CL|} = \frac{2R^2}{|CP|} .$$
Stąd, na podstawie znanej nierówności $r \le \frac{1}{2}R$, dostajemy oszacowanie
$$|CP| = \frac{2R^2}{h} = 2h\left(\frac{R}{h}\right)^2 = 2h\left(\frac{R}{R+r}\right)^2 \ge 2h\left(\frac{R}{R+\frac{1}{2}R}\right)^2 = \frac{8}{9}h ,$$
przechodzące w równość dla trójkąta równobocznego. W takim razie minimalna możliwa wartość stosunku $|CP| : h$ wynosi $8:9$.

306. Zauważmy, że
$$(p-k)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} p^j (-k)^{p-j} \equiv -k^p \pmod{p^2} .$$
Wobec tego $r_{p-k} = p^2 - r_k$, skąd ostatecznie
$$\sum_{k=1}^{p-1} r_k = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} r_k + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} r_{p-k} = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} p^2 = \frac{p^2(p-1)}{2} .$$

Zadania z fizyki nr 211, 212

Redaguje Jerzy B. BROJAN

211. Punkt P znajduje się w odległości a od pionowej ścianki naczynia, a różnica wysokości między nim a poziomem cieczy w naczyniu jest równa b (rys. 1). Jaki warunek muszą spełniać a i b, żeby strumień cieczy wytryskującej przez otworek w ściance nie mógł osiągnąć punktu P, niezależnie od położenia otworka?



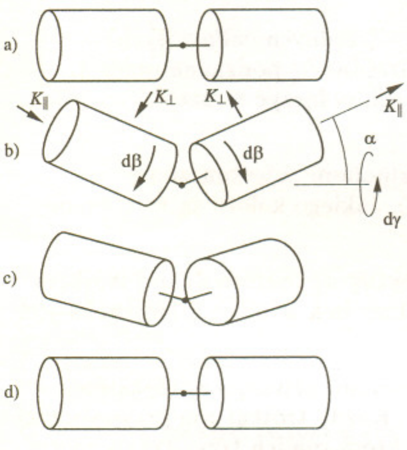
Rys. 1

212. Cewkę umieszczono w zewnętrznym niejednorodnym polu magnetycznym, gdzie płynący przez nią prąd o natężeniu I powoduje wystąpienie wypadkowej siły $\mathbf{F}$. Przyjmijmy założenie, że taka sama siła działa ne cewkę w każdym miejscu pewnego obszaru Ω. Wykazać, że jeśli cewka jest bezoporowa i nie może się obracać (a jedynie przesuwać równolegle), to po jej zwarciu i pchnięciu w kierunku siły $\mathbf{F}$ będzie się ona w obrębie Ω poruszała ruchem drgającym. Znaleźć częstotliwość tych drgań, jeśli masa cewki jest równa m, a indukcyjność L.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1995

Przypominamy treść zadań:

203. Aby objaśnić mechanizm umożliwiający obrót kota w powietrzu (i spadek na cztery łapy), przedstawmy ciało kota w postaci dwóch jednorodnych i jednakowych walców o promieniu r i wysokości h osadzonych na ośkach połączonych przegubowo (rys. 2). Przyjmijmy, że początkowo układ walców był nieruchomy, dalej nastąpiło zgięcie w przegubie o kąt 2α, następnie walce obróciły się o jednakowy kąt β względem układu związanego z ośkami, a po zakończeniu obrotu ośki się wyprostowały. O jaki kąt obróciły się walce względem układu inercjalnego? Pominąć oddziaływanie z powietrzem.
Pytanie dodatkowe: O jaki kąt i w jakiej płaszczyźnie obróciłby się układ walców, gdyby obrót o kąt β nastąpił z przeciwnym zwrotem (rys. 3)?



Rys. 2

204. Ocenić orientacyjnie maksymalny ładunek, jakim można naładować kulkę stalową o średnicy 2 cm, aby nie uległa ona rozerwaniu pod wpływem odpychania elektrostatycznego (ewentualnie także – aby nie oderwała się od niej warstwa powierzchniowa).

203. W fazie b–c (rys. 2) ruch każdego z walców jest złożeniem dwóch obrotów: cały układ walców wraz z ośkami obraca się wokół osi poziomej, a jednocześnie walce obracają się na ośkach. Niech kąt obrotu całości w ciągu nieskończenie małego przedziału czasu dt będzie równy $\mathrm{d}\gamma$, a odpowiedni kąt obrotu walców względem osiek – $\mathrm{d}\beta$. Ponieważ prędkość kątową można – jak każdy inny wektor – dodawać wektorowo i rozkładać na składowe, więc wzdłuż swojej osi walce obracają się względem układu inercjalnego z prędkością kątową

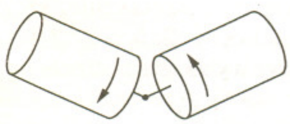
$$\omega_{\|} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\cos\alpha\,,$$

natomiast wzdłuż osi prostopadłej – z prędkością kątową $\omega_{\perp} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\sin\alpha$. Składowe $K_{\|}$ i $K_{\perp}$ momentu pędu walców znajdujemy mnożąc $\omega_{\|}$ i $\omega_{\perp}$ przez momenty bezwładności $I_{\|} = \frac{1}{2}mr^2$ i $I_{\perp} = \frac{1}{4}m\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right)$. Całkowity moment pędu pozostaje stale równy zeru, więc uwzględniając przedstawione na rysunku 2b zwroty otrzymujemy równanie $2K_{\|}\cos\alpha - 2K_{\perp}\sin\alpha = 0$, czyli

$$I_{\|}\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\cos\alpha\right)\cos\alpha = I_{\perp}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\sin^2\alpha$$

albo

$$I_{\|}\mathrm{d}\beta\cos\alpha = (I_{\perp}\sin^2\alpha + I_{\|}\cos^2\alpha)\mathrm{d}\gamma\,.$$


Rys. 3

Ponieważ założyliśmy, że w czasie obrotu kąt skręcenia α jest stały, więc ostatni wzór obowiązuje nie tylko dla małych kątów $\mathrm{d}\beta$ i $\mathrm{d}\gamma$, ale i dla całkowitych kątów obrotu. Ostatecznie kąt obrotu δ walców wynosi

$$\delta = \beta - \gamma = \beta\frac{I_{\perp}\sin^2\alpha + I_{\|}\cos\alpha(\cos\alpha - 1)}{I_{\perp}\sin^2\alpha + I_{\|}\cos^2\alpha}\,.$$

Jeśli obrót walców o kąt β będzie miał przeciwny zwrot, to z analogicznego rozumowania wynika, że całość obróci się w płaszczyźnie poziomej o kąt

$$\delta = \frac{\beta I_{\|}\sin\alpha}{I_{\perp}\cos^2\alpha + I_{\|}\sin^2\alpha}\,.$$

204. Ścisła analiza rozkładu naprężeń wewnątrz kulki byłaby zapewne dość trudna, więc ograniczymy się do analizy wymiarowej. Szukany ładunek może zależeć od promienia kulki r, od wytrzymałości W i od stałej $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ występującej w prawie Coulomba (pomijamy mało istotną – jak się zdaje – zależność od modułu Younga i współczynnika Poissona, które opisują własności sprężyste materiału). Jedyną kombinacją r, W i k o wymiarze ładunku jest

$$Q = \mathrm{const}\cdot r^2\sqrt{W/k}\,.$$

Podstawiając wytrzymałość dla stali $W \approx 10^9\ \mathrm{N/m^2}$ i $k = 9\cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ otrzymujemy dla stałej rzędu jedności $Q \approx 3\cdot 10^{-5}$ C.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 199 (WT=2,15) i 200 (WT=2,95) z numeru 5/1995

Artur Gawryszczak	– Dubeczno	43,40
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Aleksander Surma	– Myszków	30,79
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	23,31
Przemysław Gworys	– Częstochowa	22,32
Jarosław Łazuka	– Warszawa	17,03