Kącik olimpijski (14)

Rozwiązania kolorami

Redaktor naczelny *Delty* opowiadał kiedyś, że po pół roku istnienia czasopisma „na Zjeździe PTM urządzono awanturę, że *Delta* jest zbyt efektowna i jacyś głupcy mogą ją kupować dlatego, że ma kolorowe okładki, i że to jest niedobrze. W obronę wzięła wtedy *Deltę* profesor Krygowska, która zaczęła wystąpienie od zdania, że matematyka jest kolorowa". Kolorowa matematyka może się przydać przy rozwiązywaniu rozmaitych problemów i zadań, także olimpijskich. I nie chodzi tylko o to, że rysunek zrobiony za pomocą kilku kolorów jest bardziej czytelny. Kolory pomóc mogą przy lepszym zredagowaniu pracy, ułatwić albo wręcz umożliwić rozwiązanie. Na przykład: ***kwadrat o boku długości n (n jest liczbą parzystą) dzielimy na kwadraty jednostkowe, wycinamy dwa przeciwległe narożne kwadraty; czy powstałą figurę można pokryć prostokątami wymiaru*** 2×1? Odpowiedź się nasuwa, gdy duży kwadrat pomalujemy tak, jak szachownicę, bo każdy prostokąt pokryje jedno pole białe i jedno czarne... Takich zadań jest więcej; poniższe (czasem trochę inaczej sformułowane) pojawiły się na polskich Olimpiadach Matematycznych. Dla chcących powalczyć z tymi zadaniami podaję tylko wskazówki; moim zdaniem, gdy z rozwiązaniem zadania (w szczególności olimpijskiego) ma się kłopoty, wskazówka rozwija umysł lepiej niż przeczytanie rozwiązania.

1. Ze zbioru punktów kratowych (tzn. o obu współrzędnych całkowitych) na płaszczyźnie usuwamy te, których obie współrzędne są podzielne przez 4. Udowodnić, że pozostałych punktów nie można tak połączyć w pary, by odległość punktów każdej pary była równa 1.

Wskazówka: Punkty kratowe można utożsamić z polami „nieskończonej szachownicy" (każdy z punktów na środku pola). Jakiego koloru są wyrzucone punkty?

2. Każde trzy z sześciu danych punktów płaszczyzny są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok jednego z trójkątów jest jednocześnie najdłuższym bokiem innego.

Wskazówka: Te odcinki, które są najkrótszymi bokami pewnego z trójkątów, pomalujmy na czerwono, a pozostałe na zielono. Każdy trójkąt ma przynajmniej jeden czerwony bok; wykażemy, że istnieje taki, który ma ich trzy. Trzy z pięciu odcinków wychodzących z jednego z punktów są tego samego koloru...

3. W turnieju szachowym uczestniczy 66 osób, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Wykazać, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

Wskazówka: Możemy utożsamić szachistów z punktami na płaszczyźnie, które łączymy odcinkami czterech kolorów. Rozważmy teraz liczby: 2, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $16 = 5 \cdot 3 + 1$, $65 = 16 \cdot 4 + 1$. Wybierzmy jeden punkt; wychodzi z niego przynajmniej 17 odcinków tego samego koloru...

4. Wypukły n-kąt można tak podzielić przekątnymi na trójkąty, by z każdego wierzchołka wychodziła parzysta liczba przekątnych i by dwie przekątne nie miały wspólnych punktów wewnętrznych; wykazać, że n jest podzielne przez 3.

Wskazówka: Jeśli figurę na płaszczyźnie podzielimy prowadząc k prostych, to możemy powstałe części tak pomalować dwoma kolorami, by dwie mające bok wspólny były różnych kolorów (dowód indukcyjny). Teraz pomalujmy w ten sposób nasze trójkąty. Należy wykazać, że wszystkie trójkąty, które mają choć jeden bok wspólny z wyjściowym wielokątem, są pomalowane na ten sam kolor, a potem odpowiednio policzyć odcinki...

5. Dany jest zbiór n punktów kratowych na płaszczyźnie. Udowodnić, że istnieje taki podzbiór A tego zbioru, że A ma nie mniej niż $\frac{n}{4}$ elementów i dowolne dwa różne punkty z A są odległe co najmniej o 2.

Wskazówka: Tym razem szachownicę tak pomalujmy na cztery kolory, by dwa pola tego samego koloru nie stykały się ani w jednym punkcie (w jednym rzędzie dwa kolory na przemian). Jeśli dwa pola są tego samego koloru, to odległość ich środków wynosi co najmniej 2...

Krzysztof CIESIELSKI

Rozwiązanie zadania M 761. Przecinając sfery a, b i c płaszczyzną ABC stwierdzamy, na mocy zadania **M 759**, iż mają w tej płaszczyźnie punkt wspólny X. Analogicznie sfery a, b i d mają w płaszczyźnie ABD punkt wspólny Y, natomiast sfery a, c i d mają w płaszczyźnie ACD punkt wspólny W. Punkty A, G, F, E, X, Y i W leżą na sferze a. Ponadto punkty A, G, F i Y są współpłaszczyznowe, podobnie – punkty A, E, F, W i punkty A, G, E, X. Na mocy zadania **M 760** okręgi GXY, XEW i YFW mają na sferze a punkt wspólny. Ponieważ okręgi te zawierają się w sferach b, c i d, odpowiednio, punkt ten należy do wszystkich czterech sfer, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania F 419. Szukamy rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

z periodycznym warunkiem brzegowym: $T(0,t) = T_0 \cos\omega t$, gdzie $\omega = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$ jest częstością obiegu Ziemi wokół Słońca. Rozwiązanie ma postać

$$T(x,t) = T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) \times \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right),$$

gdzie T_0 jest amplitudą zmian temperatury na powierzchni Ziemi; $T_x = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)$, a jest współczynnikiem przewodnictwa temperaturowego, szukane zaś opóźnienie wynosi

$$\delta = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x = \frac{1}{\omega}\ln\frac{T_0}{T_x} \approx 117\ \text{dni}.$$

W rozwiązaniu nie uwzględniliśmy możliwości zamarzania wody gruntowej (tajania lodu), co wymagałoby modyfikacji równania przewodnictwa. Uzyskany wynik jest jednak realistyczny. Aby to sprawdzić, można obliczyć współczynnik przewodnictwa temperaturowego

$$a = \frac{\omega x^2}{2\ln^2\frac{T_x}{T_0}} \approx 3{,}92 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}.$$

Eksperymentalnie zmierzone wartości tego współczynnika mają dla kilku substancji następujące wartości (w cm^2/s):
bazalt: $a = 6{,}77 \cdot 10^{-3}$;
granit: $a = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ do $6 \cdot 10^{-3}$;
piasek: $a = 1{,}44 \cdot 10^{-3}$.