epsilon

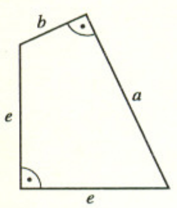
1/96
(58)

W poprzednim *EPSILONIE* wspomniany był znakomity topolog amerykański, R.H. Bing. Wszystkie jego prace (a nie było ich mało) podpisane były jedynie inicjałami. Mógłby ktoś pomyśleć, że Bing z jakichś tajemniczych powodów używał jedynie inicjałów; rzecz w tym, że pod inicjałami R.H. nie kryło się nic, tak właśnie miał Bing na imię (w USA jest to dozwolone). Związana jest z tym anegdota; otóż przed narodzinami młodego Binga ustalono, że otrzyma on imiona po dziadku, niemieckiego pochodzenia. Imiona te brzmiały Rupert Heinrich i bardzo się mamie Binga nie podobały. Gdy Bing się urodził i poproszono matkę o podanie imion (tak tam robiono, i było to wiążące), podyktowała jako imiona skrót: R.H.

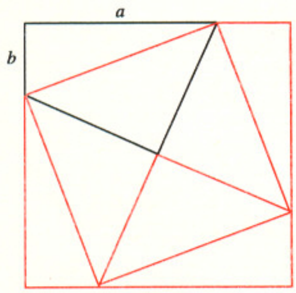
Kolejna anegdota mówi, że gdy dorosły już Bing przekraczał kiedyś granicę państwową, urzędnik zażądał od niego podania pełnych imion. Bing zaczął tłumaczyć, że to jest właśnie jego pełne imię, urzędnik zapytał: „R.H.?", na co Bing: „Only, only" (tylko, tylko). Urzędnik wpisał w deklaracji: „Ronly Honly Bing".

Dorysowywanie

Zacznijmy od zadania. *Dany jest czworokąt, którego dwa przeciwległe kąty są proste; długości boków przy jednym z kątów prostych wynoszą odpowiednio a i b, długości boków przy drugim kącie prostym są równe. Obliczyć długość przekątnej łączącej wierzchołki przy kątach prostych.*



Rys. 1



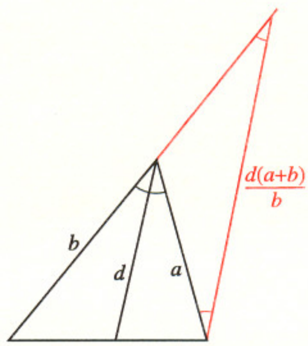
Rys.2

Wielu matematyków zadania tego nie potrafiło rozwiązać. Szukana odległość wynosi $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$; jak to wykazać? Wykorzystamy rysunek przedstawiający dowód twierdzenia Pitagorasa, pochodzący prawdopodobnie od samego Pitagorasa, wzięty z książki Szczepana Jeleńskiego (rys. 2).

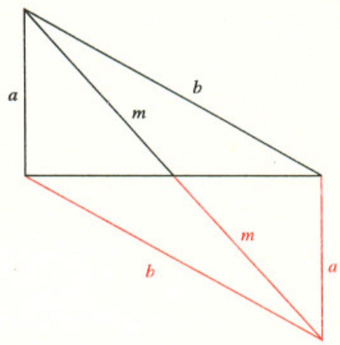
Wystarczy zauważyć, że rozważana przekątna to połowa przekątnej dużego kwadratu z rysunku drugiego.

Teraz pora na twierdzenie Talesa; najpierw zadanie. *W dwóch trójkątach długości boków i dwusiecznej kąta między tymi bokami są odpowiednio równe. Czy te trójkąty są przystające?* Oczywiście, znowu, by rozwiązać zadanie, wystarczy odpowiedni rysunek. Oznaczmy długości boków przez a i b, dwusiecznej przez d. W każdym z trójkątów narysujmy półprostą zawierającą odcinek o długości b, na tej zaś półprostej tak zaznaczmy odcinek o długości a, by obok trójkąta wyjściowego narysowany został trójkąt równoramienny o boku długości a (rys. 3). Zauważmy, że kąt przy podstawie nowego trójkąta równy jest kątowi między wspólnym bokiem trójkątów i dwusieczną, zatem podstawa ta i dwusieczna są równoległe. Możemy skorzystać z twierdzenia Talesa i obliczyć długość podstawy; wynosi ona $\frac{d(a+b)}{b}$. Wobec tego dorysowane (do obu wyjściowych) trójkąty są przystające; mają po trzy parami równe boki. Daje nam to równość kątów przy podstawie, tym samym równość kątów przy wspólnym wierzchołku boków i dwusiecznej. Korzystając z cechy przystawania *bok–kąt–bok* kończymy dowód.

Trzecie zadanie podobne jest do drugiego. *W dwóch trójkątach długości boków i środkowej, poprowadzonej ze wspólnego wierzchołka, są odpowiednio równe. Czy trójkąty te są przystające?* Oznaczmy długości boków trójkątów przez a i b, środkowych przez m. Narysujmy równoległoboki o bokach długości a i b oraz przekątnej $2m$ (rys. 4). Trójkąty o bokach a, b i $2m$ są przystające, mają też równe środkowe – w tym przypadku są to połówki drugiej przekątnej równoległoboku. Zauważmy, że połówki te dają w sumie trzeci bok, oczywiście, równy w obu trójkątach, czyli na mocy cechy przystawania *bok–bok–bok* dane trójkąty są przystające.



Rys.3



Rys.4

Dorysowywanie często okazuje się bardzo skutecznym środkiem przy rozwiązywaniu zadań z geometrii elementarnej. Dzięki sprytnemu rysunkowi niektóre, z pozoru trudne zadania, można rozwiązać niemal błyskawicznie. Metoda ta, kiedyś bardzo popularna i propagowana, wydaje się obecnie (zwłaszcza w szkole) zapominana – a szkoda!

Można zadać pytanie: a skąd wiadomo, co dorysować? W tym bywa pomocna właśnie znajomość metod dowodowych elementarnej geometrii. W pierwszym zadaniu rozwiązanie sugerował odpowiedni dowód twierdzenia Pitagorasa, w drugim – dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie.

Tą metodą można też ładnie udowodnić znane twierdzenia. Na przykład:
– trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie; punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1;
– trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie;
– odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw.
Ale o tym następnym razem.

Danuta CIESIELSKA

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.