Twierdzenie słynnej Rosjanki

Paweł STRZELECKI

Kto przeczytał już artykuł Marka Kordosa o męskiej szowinistycznej świni, wie, że Zofia Kowalewska zdobyła (tak właśnie: nie *napisała*, nie *zrobiła*, ale *zdobyła*) doktorat dowodząc słynnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tzw. zagadnienia początkowego Cauchy'ego dla równań cząstkowych z analitycznymi współczynnikami. Spróbujemy opowiedzieć zainteresowanym Czytelnikom, co to za twierdzenie, a niedowiarków przekonać o doniosłości pracy Kowalewskiej.

Czytelnicy *Delty* mieli okazję spotkać się z przestrzenią $\mathbf{R}^m$ w n-rze 6/1995, w artykule D. Kołodziejczyk *Słynny problem Borsuka rozstrzygnięty*. Jeśli $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, to

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$$

jest odległością x od początku układu współrzędnych. Jeśli $x, y \in \mathbf{R}^m$, to ich odległość $d(x,y)$ określamy wzorem $d(x,y) = \|x - y\|$. Wprowadzenie odległości pozwala mówić o kulach i zbiorach otwartych (domkniętych).

Na początek – trochę notacji. Po pierwsze, dla m naturalnego przez $\mathbf{R}^m$ oznaczymy m-wymiarową przestrzeń euklidesową z ustalonym kartezjańskim układem współrzędnych.

Grecką literą α będziemy oznaczać tzw. *wielowskaźniki*, albo – jak mawiają zwolennicy marszu do Europy – *multiindeksy*. Taki wielowskaźnik to uporządkowana m-ka liczb całkowitych nieujemnych, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Długość wielowskaźnika α, oznaczana zwykle przez $|\alpha|$, to suma wszystkich jego współrzędnych, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. Dla $x \in \mathbf{R}^m$ piszemy (po to, żeby nie marnować papieru) $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$.

Jeśli funkcja f zależna od m zmiennych rzeczywistych $x \in \mathbf{R}^m$ jest gładka (tzn. ma ciągłe pochodne wszystkich rzędów), to jej pochodne cząstkowe oznaczamy dla krótkości w następujący sposób:

$$D_x^\alpha f := \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} f\,.$$

To znaczy, że funkcja $D_x^\alpha f$ powstaje z f przez α_1-krotne zróżniczkowanie względem x_1, α_2-krotne zróżniczkowanie względem x_2, ..., i wreszcie α_m-krotne zróżniczkowanie względem x_m.

Na przykład, jeśli $m = 3$, a $f(x) = x_1 x_2 x_3 + x_2 (x_3)^3$, to

$$D_x^{(0,1,2)} f(x) = 6x_3\,.$$

I ostatnia definicja: powiemy, że funkcja f jest analityczna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{R}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $x \in U$ jest środkiem takiej kuli $B \subset U$, że dla wszystkich $y \in B$ mamy

$$f(y) = \sum_\alpha a_\alpha (y - x)^\alpha\,,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe wielowskaźniki α, a współczynniki a_α są rzeczywiste (lub zespolone, gdy rozpatrujemy funkcje o wartościach zespolonych). Równoważnie można powiedzieć, że funkcje analityczne to takie funkcje, które są sumami zbieżnych szeregów potęgowych (albo, co na jedno wychodzi, swoich szeregów Taylora).

Funkcją analityczną jest np. każdy wielomian. Wbrew pozorom, nie wszystkie funkcje gładkie są analityczne. Jeśli $f(x) = \exp(-1/x^2)$ dla $x \neq 0$ i $f(x) = 0$ dla $x = 0$, to f jest gładka, ale nie jest analityczna. Szereg Taylora f w zerze jest bowiem zerowy (proszę sprawdzić!), lecz f nie znika w otoczeniu zera.

Uff! Po tym wstępie możemy nareszcie przejść do sedna sprawy. Niech u, $w_{\alpha,j}$ oraz F będą funkcjami $m+1$ zmiennych rzeczywistych (x,t), gdzie $x \in \mathbf{R}^m$, a $t \in \mathbf{R}$. Rozważymy tzw. *równanie cząstkowe typu Kowalewskiej*,

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j \le k \\ j \le k-1}} w_{\alpha,j}(x,t) \frac{\partial^j D_x^\alpha u}{\partial t^j}(x,t) + F(x,t)\,.$$

W powyższym równaniu funkcje F i $w_{\alpha,j}$ traktujemy jako dane, a funkcję u jako niewiadomą. Czytelnik zechce zwrócić uwagę na fakt, że po prawej stronie równania nie występują pochodne funkcji u rzędów wyższych niż k ani pochodne względem zmiennej wyróżnionej t rzędów wyższych niż $k-1$.

Nietrudno podać przykład równania, które nie jest typu Kowalewskiej. Wystarczy po prawej stronie wpisać mieszane pochodne odpowiednio wysokiego rzędu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + F(x,t)\,.$$

Z twierdzenia Kowalewskiej wynika istnienie rozwiązań całej masy równań różniczkowych cząstkowych, które napotykamy w fizyce matematycznej. Jest wśród nich m.in. równanie drgającej struny i membrany, równanie przewodnictwa ciepła, sławne równanie Schrödingera i równania dynamiki gazów.

Jak to zwykle w teorii równań różniczkowych bywa, równanie (1) uzupełniamy dodatkowymi warunkami (tzw. warunkami Cauchy'ego) po to, by zagwarantować jednoznaczność rozwiązania u. Ponieważ równanie jest rzędu k, to prosta intuicja podpowiada, iż trzeba dodać k warunków (*k-krotne całkowanie wymaga k-krotnego podjęcia decyzji o wyborze stałej*). Przypuśćmy więc, że na hiperpłaszczyźnie $t = 0$ w przestrzeni $\mathbf{R}^{m+1}$ zadane są funkcje $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ (każda z nich zależy od m zmiennych $x \in \mathbf{R}^m$). Zakładamy, że

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x,0) = \varphi_j(x) \qquad \text{dla } j = 0, 1, \ldots, k-1\,. \tag{2}$$

Twierdzenie (Zofia Kowalewska). *Oznaczmy przez $\Omega_{R,T}$ zbiór w kształcie walca,*

$$\Omega_{R,T} = \{(x,t) \in \mathbf{R}^{m+1} \ : \ \|x\| < R, |t| < T\}\,.$$

Jeśli wszystkie funkcje $w_{\alpha,j}$ oraz F są analityczne w $\Omega_{R,T}$, a funkcje φ_j są analityczne w $\Omega_{R,T} \cap \{t = 0\}$, to istnieją liczby $R_1 \in (0,R)$ i $T_1 \in (0,T)$ oraz funkcja u analityczna w walcu Ω_{R_1,T_1}, która spełnia równanie (1) oraz warunki Cauchy'ego (2) dla $|t| < T_1$ i $\|x\| < R_1$.

Znane obecnie dowody tego twierdzenia są zdecydowanie zbyt trudne i długie na to, by w całości przedstawić na łamach *Delty* choćby jeden z nich. Wspomnimy jedynie o pomysłach, na których opierają się dwa różne dowody.

Pierwszy pomysł polega na tym, by wykorzystać warunki (2) oraz równanie (1) do obliczenia, jakie wartości powinny mieć w punkcie $x = 0$, $t = 0$ wszystkie możliwe pochodne cząstkowe rozwiązania u. (To nietrudna część dowodu: Czytelnicy mogą samodzielnie wymyślić, jak to zrobić). Znajomość pochodnych funkcji u w zerze umożliwia wypisanie, jaki powinien być szereg Taylora u. I to prawie koniec, z jednym tylko „drobiazgiem" – trzeba się bardzo solidnie namęczyć: ów wypisany bez większych kłopotów szereg Taylora powinien być zbieżny na pewnym zbiorze *otwartym* zawierającym początek układu w $\mathbf{R}^{m+1}$.

Dowód twierdzenia Kowalewskiej można bez przeszkód uogólnić na przypadek, gdy prawa strona równania zależy od funkcji u i jej pochodnych w sposób nieliniowy. Można też udowodnić (tak samo) odpowiednie twierdzenie dla układów równań różniczkowych cząstkowych. Pozwala to bardzo rozszerzyć listę zastosowań twierdzenia Kowalewskiej.

Inny możliwy dowód to naśladowanie tzw. metody kolejnych przybliżeń stosowanej zazwyczaj w dowodzie twierdzenia Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla równania różniczkowego zwyczajnego (takiego, w którym występują tylko funkcje zależne od jednej zmiennej). I tu jednak sytuacja znacznie się komplikuje: zamiast jednej przestrzeni Banacha, która w pełni wystarcza do dowodu twierdzenia Cauchy'ego dla równań zwyczajnych, dowodzenie twierdzenia (Cauchy'ego?–)Kowalewskiej wymaga dłuższych męczarni z nieskończoną rodziną przestrzeni Banacha.

Ktoś dobrze zaprzyjaźniony z tytułową bohaterką (dalej w skrócie m.s.ś.) artykułu Marka Kordosa rzuci być może w tym momencie:
No dobrze, może nawet Kowalewska wcale nie przepisywała ze starych rękopisów Cauchy'ego. Ale co to za sztuka udowodnić twierdzenie, skoro przyjęła bardzo silne założenia o analityczności współczynników? A tak w ogóle, to pewnie jedyna kobieta, która zdołała cokolwiek zdziałać w trudnej i ważnej teorii równań cząstkowych.

Takiego stwierdzenia nie można zostawiać bez odpowiedzi.

Dokładniej, istotne jest założenie o analitycznej zależności współczynników od zmiennej x. Jeśli chodzi o zależność od t, to wystarczy zakładać, że jest ona ciągła.

Po pierwsze, wiele lat po śmierci Kowalewskiej okazało się, że założenie o analityczności współczynników w jej twierdzeniu jest istotne. Pierwszy przykład układu liniowych równań różniczkowych cząstkowych o gładkich współczynnikach, nie mającego żadnego rozwiązania, podał w 1957 roku amerykański matematyk Hans Lewy. Inni matematycy, m.in. François Treves

i Louis Nirenberg, podali poźniej przykłady znacznie prostsze od tego, który wymyślił Lewy. Jest wśród efektów ich pracy jeden przykład szczególnie prosty i elegancki.

Przykład. Niech f będzie funkcją gładką o zwartym nośniku dwóch zmiennych rzeczywistych $(x,t) \in \mathbf{R}^2$. Załóżmy, że $f(x,t) = f(x,-t)$ i $f(x,t) \geq 0$ dla wszystkich x i t. Przypuśćmy ponadto, że nośnik funkcji f (tzn. domknięcie zbioru tych punktów (x,t), dla których $f(x,t) \neq 0$) jest rozłączny z prostą $\{t=0\}$. Kto chce, może sobie wykres takiej funkcji wyobrażać jako dwa symetryczne kapelusze położone z dala od siebie na stole.

Okazuje się, że dla takiej funkcji f tzw. równanie Mizohaty

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + it\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \tag{3}$$

(i oznacza tu liczbę zespoloną spełniającą równanie $i^2 = -1$) nie ma **żadnego** rozwiązania. Wspomnijmy jednocześnie, że gdy f zależy od zmiennej t w sposób nieparzysty, to wtedy równanie Mizohaty ma rozwiązania.

Oto szkic dowodu nieistnienia rozwiązań równania (3). Dowodzimy przez sprowadzenie do sprzeczności.

1. Jeśli istnieje rozwiązanie u, to istnieje też rozwiązanie u_1 zależne od t w sposób nieparzysty.
2. Jeśli $s = t^2/2$, to na zbiorze $G = \{f = 0\}$ funkcja u_1 zależy od zmiennej $z = s + ix$ w sposób analityczny.
3. $u_1 \equiv 0$ na zbiorze G.
4. Całka z u_1 po brzegu G powinna więc znikać, ale gdy zastosujemy tw. Stokesa i przypomnimy sobie własności f, to okaże się, że $0 \neq 0$.

Czytelnicy, którzy znają twierdzenie Stokesa, mogą przeczytać wskazówki na marginesie i po samodzielnym wykonaniu półstronicowego rachunku przekonać się, że dla opisanych wyżej funkcji f równanie (3) istotnie nie ma żadnego rozwiązania.

Jeśli zaś chodzi o drugi zarzut przyjaciół m.s.ś., to Kowalewska wcale nie była jedyną kobietą osiągającą znaczące wyniki w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Lista nazwisk pań, którą można by tu szermować, jest długa. Dość wspomnieć dwie inne Rosjanki, Olgę Ładyżeńską i Ninę Uralcewą: licząca sobie około trzydziestu lat ich potężna monografia jest stale cytowana w setkach prac. Po drugiej stronie Atlantyku też mają się czym pochwalić. W ubiegłym roku Susan Friedlander zorganizowała w MIT niezwyczajną dwudniową konferencję: w roli mówców występowały na niej tylko kobiety (takie, które wcale nie potrzebują korzystać z pomocy feministów, by otrzymywać zaproszenia do wystąpień na Międzynarodowych Kongresach Matematyków). Połowa referatów dotyczyła w różny sposób właśnie teorii równań różniczkowych cząstkowych. Cathleen Morawetz mówiła o równaniu falowym, Jean Taylor o równaniach różniczkowych opisujących powierzchnie poruszające się w przestrzeni $\mathbf{R}^3$, a Chuu-Lian Terng i Karen Uhlenbeck – o nieliniowych równaniach różniczkowych występujących w geometrii różniczkowej.

Pod rezultatami Uralcewej, Taylor, Morawetz czy Uhlenbeck chętnie podpisałaby się niejedna m.s.ś. Zamiast zakończenia będzie więc historyjka. W 1986 roku autor niniejszego tekstu, na polecenie opiekuna swej pracy magisterskiej, studiował artykuł pewnego niemieckiego matematyka, świeżo opublikowany w znanym włoskim czasopiśmie. Niemiec ów (jego nazwisko okryjmy tutaj milczeniem) uogólniał i rozszerzał w swej pracy pewne twierdzenie Karen Uhlenbeck pochodzące z 1977 roku, opisując przy okazji jego historię. W 1983 roku amerykański matematyk Craig Evans opublikował krótki, elegancki dowód pewnego prostego wariantu twierdzenia Uhlenbeck. W artykule owego Niemca natrafić można na zdanie: „Uralcewa udowodniła twierdzenie Evansa w 1968 roku."

Prace Jean Taylor należą do modnej ostatnio *teorii ewolucji geometrycznej*. Oto przykład problemu z tej dziedziny: opisać ruch błony mydlanej rozpiętej na drucianym konturze, którą na chwilę (np. dmuchnięciem) wyprowadzono z położenia stabilnej równowagi.

Metody tej teorii stosują się – o dziwo – w metalurgii oraz do opisu procesów wzrostu kryształów.

Rok 1968 to piętnaście lat wcześniej od publikacji Evansa. Kto więc i kiedy udowodnił czyje twierdzenie? Panowie: mniej śpijmy, mniej jedzmy, a więcej pracujmy. I ważmy nasze sądy i słowa.