Symetrie i prawa zachowania

Jan KALINOWSKI, Krzysztof REJMER

W 1918 r. Emma Noether (1885–1935) sformułowała i udowodniła twierdzenie, zwane dzisiaj twierdzeniem Noether, dzięki któremu na trwałe wpisała się do fizyki. Twierdzenie to łączy zasady zachowania różnych wielkości fizycznych z określonymi symetriami układu. I tak, na przykład, zasada zachowania pędu wiąże się z symetrią względem przesunięć, momentu pędu – z symetrią względem obrotów, a energii – z symetrią względem przesunięć w czasie.

Podstawowymi pojęciami tego twierdzenia są ciągłe, różniczkowalne grupy transformacji (zwane grupami Liego) oraz wielkość fizyczna zwana lagranżjanem.

Lagranżjan danego układu fizycznego $\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x))$ jest funkcją zmiennych dynamicznych opisujących ten układ, $\psi(x)$, i ich pochodnych $\partial_\mu\psi(x) \equiv \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}$ względem $x^\mu = (t, \vec{x})$.

Przykładowo – w mechanice klasycznej punktu materialnego o masie m x – to czas t, $\psi(x)$ – położenie punktu w danej chwili $\vec{r}(t)$, a $\partial\psi(x)$ – to jego prędkość $\dot{\vec{r}} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$. Jeśli punkt znajduje się w polu siły potencjalnej $\vec{F}$, gdzie $F_i = -\partial V(\vec{r})/\partial r_i$, to lagranżjan jest równy różnicy energii kinetycznej i potencjalnej $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\dot{\vec{r}}^2/2 - V(\vec{r}, t)$.

Lagranżjan odgrywa w fizyce olbrzymią rolę, gdyż korzystając z tzw. zasady najmniejszego działania mówiącej, że fizycznemu procesowi odpowiadają takie konfiguracje $\psi(x)$, dla których całka z lagranżjanu $S(\psi) = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi)\,\mathrm{d}x$ (zwana działaniem) przyjmuje wartość minimalną, można z postaci lagranżjanu wyprowadzić równania opisujące dynamikę układu – tak zwane równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\psi} = 0\,. \tag{1}$$

Będziemy stosować konwencję, że po wskaźniku powtarzającym się (we wzorze powyżej – μ) wykonujemy sumowanie.

Dla punktu materialnego równanie Eulera-Lagrange'a (r. E-L) można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i} = 0\,.$$

Jeśli $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\dot{\vec{r}}^2/2 - V(\vec{r}, t)$, to r. E-L przyjmuje dobrze znaną postać równania Newtona $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.

Grupy Liego to grupy transformacji w r-wymiarowej przestrzeni funkcji $\psi^a(x)$, $(a = 1, \ldots, r)$, które można zadać za pomocą n-parametrowej algebry Liego, to znaczy po dowolnej (ale zadanej) transformacji funkcji $\psi \to \psi'$ wynik można przedstawić jako

$$\psi'^a(x) = (\exp(-i\varepsilon_i T_i))^a_b\ \psi^b(x)\,, \tag{2}$$

gdzie T_i $(i = 1, \ldots, n)$ są r-wymiarowymi, niezależnymi od parametrów ε_i macierzami zwanymi generatorami. Generatory spełniają relacje komutacyjne

$$[T_i, T_j] = T_iT_j - T_jT_i = i\,f_{ijk}T_k\,, \tag{3}$$

a f_{ijk} są stałymi zwanymi stałymi struktury grupy. Parametry ε_i opisują poszczególne elementy grupy Liego i pełnią rolę współrzędnych tych elementów, przy czym jest ich tyle, ile jest generatorów grupy.

Jeśli pewne transformacje g: $\psi^a \to \psi'^a$ nie zmieniają postaci lagranżjanu, $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi) \equiv \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi')$, to mówimy, że lagranżjan jest niezmienniczy, a transformację g nazywamy transformacją symetrii $\mathcal{L}$.

Możemy teraz sformułować twierdzenie Noether:
Z każdą ciągłą, n-parametrową grupą transformacji symetrii lagranżjanu wiąże się prawo zachowania dokładnie n wielkości fizycznych.
Rozpatrzmy bowiem lagranżjan będący niezmiennikiem pewnej grupy transformacji g: $\psi^a(x) \to \psi'^a(x) = \psi^a(x) + \delta\psi^a(x)$. Gdy transformacje są infinitezymalne (bliskie tożsamości), możemy napisać $\delta\psi^a(x) = -i\varepsilon_i(T_i)^a_b\psi^b(x)$. Dla pochodnej mamy $\delta\,\partial_\mu\psi^a(x) = \partial_\mu\,\delta\psi^a(x)$. (Rozpatrujemy jedynie – dla uproszczenia – tak zwane transformacje globalne, gdzie ε_i nie zależą od x – dla transformacji lokalnych $\varepsilon(x)$ dowód jest trudniejszy.) Wówczas zmiana lagranżjanu wynosi

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^a}\delta\psi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a}\delta\partial_\mu\psi^a = \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a}\right)\delta\psi^a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a}\delta\psi^a\right), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru na różniczkowanie iloczynu.

Załóżmy teraz, że lagranżjan jest niezmienniczy względem przesunięć o dowolny wektor $\vec{u} = (u, 0, 0)$ wzdłuż osi x, to znaczy $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \mathcal{L}(\vec{r} + \vec{u}, \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}})$. Jest to możliwe, gdy potencjał nie zależy od składowej x, to znaczy, gdy nie działają siły o niezerowej x-owej składowej. W tym przypadku człon $\delta\psi^a$ przyjmuje postać $\vec{u}$, a $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a} \to \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}}$. Prawo zachowania ma więc postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{x}\,,$$

to znaczy, że składowa x-owa pędu jest stałą ruchu.

Pierwszy wyraz znika na mocy równania Eulera–Lagrange'a. Drugi wyraz możemy zapisać w następującej postaci

$$\varepsilon_i \partial_\mu j_i^\mu = 0 \,, \tag{5}$$

gdzie

$$j_i^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} (T_i)_b^a \psi^b \,. \tag{6}$$

Ponieważ parametry ε_i są dowolne, to dostajemy n zachowanych wielkości j_i^μ $(i = 1, \ldots, n)$. Na marginesie poprzedniej strony ilustrujemy nasze dość formalne przekształcenia na przykładzie mechaniki klasycznej punktu materialnego z symetrią względem przesunięć.

Poszukiwania praw zachowania w fizyce można więc sprowadzić do poszukiwania symetrii lagranżjanu opisującego dany układ fizyczny. I na odwrót – znając z doświadczenia symetrię układu, możemy łatwiej skonstruować lagranżjan i tym samym wyprowadzić równania opisujące ten układ. Na przykład odkrycie pełnej symetrii równań elektryczności i magnetyzmu pozwoliło Maxwellowi na sformułowanie jednolitej teorii elektromagnetyzmu. Podobnie sto lat później odkrycie symetrii kwantowej teorii elektromagnetyzmu i teorii oddziaływań słabych (odpowiedzialnych, na przykład, za rozpad β neutronu) doprowadziło do stworzenia jednolitej teorii oddziaływań elektrosłabych.

Bez przesady można powiedzieć, że twierdzenie, które zawdzięczamy Emmie Noether, stało się jednym z podstawowych narzędzi współczesnej fizyki.

W elektrodynamice pole elektromagnetyczne opisywane jest dwoma polami wektorowymi: natężenia pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{r}, t)$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Oba pola można także określić za pomocą potencjałów: skalarnego $\varphi(\vec{r}, t)$ i wektorowego $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \,,$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = rot\,\vec{A} \,.$$

Te potencjały nie są określone jednoznacznie. Transformacja

$$\varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \,,$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla f \,,$$

gdzie f jest dowolną funkcją $\vec{r}$ i t, nie zmienia pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$. Jest więc transformacją symetrii. Jest to przykład transformacji lokalnej, gdyż zależy od punktu w przestrzeni i chwili czasu. Nosi ona nazwę symetrii cechowania i związana jest z nią zasada zachowania ładunku elektrycznego.

Brak symetrii

Jan KALINOWSKI, Krzysztof REJMER

Chien Sien Wu (urodzona w 1913 r. w Szanghaju, ale pracująca w USA) przeszła do historii fizyki dzięki przeprowadzeniu doświadczenia wykazującego brak symetrii prawo-lewo w mikroświecie.

Pojęcie symetrii w fizyce odgrywa olbrzymią rolę (patrz artykuł „Symetrie i prawa zachowania"). Żądanie symetrii układu prowadzi do daleko idących konsekwencji. Na przykład: z symetrii sferycznej oddziaływania kulombowskiego wynika w dużym stopniu struktura tablicy okresowej Mendelejewa, a istnienie antycząstek wynika z teorii Diraca zbudowanej na podstawie żądania relatywistycznej niezmienniczości teorii.

Jedną z symetrii dyskutowaną od zarania dziejów jest symetria odbicia przestrzennego – zamiany strony prawej na lewą i na odwrót, którą będziemy nazywali symetrią prawo-lewo. W życiu codziennym bardzo rzadko napotykamy sytuacje, które mają idealną symetrię prawo-lewo. W szczególności od czasu badań Pasteura w 1848 r. wiadomo, że substancje organiczne, których cząsteczki mogą występować w dwóch postaciach będących wzajemnym lustrzanym odbiciem, w naturalny sposób powstają tylko w jednej z nich, natomiast syntetyzowane sztucznie produkowane są w obu wersjach.

W odróżnieniu od życia codziennego prawa fizyki wykazują idealną symetrię prawo-lewo. W mechanice kwantowej istnienie symetrii prawo-lewo prowadzi do istnienia pewnego prawa zachowania. Układom fizycznym można przypisać pewną liczbę kwantową zwaną parzystością, która jest zachowana, co pozwala

Rozwiązanie zadania F 417. Zgodnie ze wzorem Laplace'a ciśnienie we wnętrzu bańki wynosi

$$p = \frac{4\sigma}{r} \,,$$

gdzie r jest promieniem bańki. Wynika stąd, że

$$pV^{1/3} = \text{const} \,.$$

Posługując się powyższym równaniem, równaniem stanu gazu doskonałego

$$pV = NRT$$

oraz pierwszą zasadą termodynamiki

$$Nc_V\,\mathrm{d}T = Nc_X\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V$$

znajdujemy szukane ciepło właściwe

$$c_X = c_V + \frac{3}{2}\mathrm{R} \,,$$

gdzie c_V jest ciepłem właściwym gazu przy stałej objętości.