Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

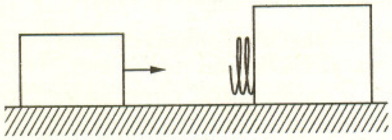
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1996

Skrót regulaminu

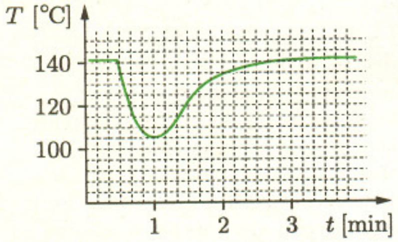
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z fizyki nr 209, 210

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1



Rys. 2

209. Klocek o masie m uderzył w klocek o masie M zaopatrzony w sprężynowy zderzak o stałej sprężystości k (rys. 1). Współczynnik tarcia f o podłoże jest jednakowy dla obu klocków i ma taką samą wartość dla tarcia statycznego, co dla kinetycznego. Po ściśnięciu sprężyna rozprostowała się, a klocki rozłączyły, podczas gdy drugi klocek pozostawał cały czas w spoczynku. Jaki warunek muszą spełniać masy m i M, aby takie zdarzenie mogło zajść? Zakładamy, że długość swobodna sprężyny jest wystarczająco duża, aby nie uległa „ściśnięciu do zera”, tzn. oddziaływanie między klockami jest opisywane przez prawo Hooke'a.

210. Pojemnik zawiera element grzejny o mocy $P = 200$ W i termometr mierzący temperaturę zewnętrznej powierzchni pojemnika. Pojemnik umieszczono w pokoju o temperaturze $T_0 = 20°$C i włączono grzejnik, w wyniku czego po dłuższym czasie termometr wskazał temperaturę $T_k = 140°$C. Wtedy wrzucono do pojemnika metal o masie $m = 100$ g i temperaturze T_0 i szybko zamknięto pojemnik. Ile wynosi ciepło właściwe tego metalu, jeśli przebieg wskazań termometru jest dany przez rysunek 2?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1995

Przypominamy treść zadań:

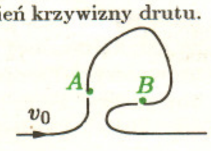
201. Koralik porusza się po wygiętym drucie, przy czym działa na niego tylko siła oddziaływania ze strony drutu (nie występuje np. siła ciężkości). Siła tarcia jest proporcjonalna do prostopadłej do drutu składowej siły oddziaływania, a stała proporcjonalności (współczynnik tarcia) jest równa $f = 0{,}1$. Zatem na prostoliniowych odcinkach drutu tarcie nie występuje. Jeśli kształt drutu jest taki, jak na rysunku 3, a początkowa prędkość wynosi $v_0 = 1$ m/s, to ile wynosi prędkość końcowa?

202. Pstrykiewicz: Do mojego aparatu fotograficznego są dwa obiektywy, jeden o dłuższej, a drugi o krótszej ogniskowej. Można też je założyć jeden przed drugim, i wtedy otrzymuję się obiektyw o ogniskowej jeszcze krótszej.
Fotończyk: Mój aparat ma też dwa obiektywy, i też jeden ma krótszą, a drugi dłuższą ogniskową. Gdy zamontuję się oba jeden za drugim, to ogniskowa jest jeszcze dłuższa.
Kamerański: Do mojego też są dwa obiektywy o różnych ogniskowych, i też można je zakładać jeden za drugim, ale można to robić w dowolnej kolejności – raz otrzymuję się obiektyw o najdłuższej ogniskowej, a jeśli się je zamieni miejscami, to o najkrótszej.
Czy to możliwe?

201. Na koralik działa siła dośrodkowa (prostopadła do toru składowa siły oddziaływania) $N = mv^2/r$ oraz siła tarcia $T = fN$, przy czym r oznacza lokalny promień krzywizny drutu.

Przyrównując $-T$ do $ma_{st} = m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ i korzystając z tożsamości $v\mathrm{d}t/r = \mathrm{d}s/r = \mathrm{d}\alpha$ (gdzie a_{st} – styczna składowa przyspieszenia, $\mathrm{d}\alpha$ – zmiana kierunku) dochodzimy do równania

$$\mathrm{d}v = -fv\mathrm{d}\alpha\,.$$



Rys. 3

Ponieważ $\mathrm{d}\alpha$ uważamy za wielkość zawsze dodatnią, więc rozwiązaniem jest $v = v_0\mathrm{e}^{-f|\alpha|}$. Wyrażenie $|\alpha|$ oznacza tu całkowity bezwzględny kąt skręcenia wyrażony w radianach, czyli na naszym rysunku jest to suma $\pi/2$ (do punktu A), $(3/2)\pi$ (od A do B) i π (od punktu B) – razem 3π. W rezultacie otrzymujemy $v = v_0\mathrm{e}^{-0{,}3\pi} = 0{,}39$ m/s.

202. Dla uproszczenia potraktujmy oba obiektywy jako pojedyncze soczewki o ogniskowych f_1 i f_2. Jeśli odległość między soczewkami wynosi d, to ogniskową układu można znaleźć standardowym rachunkiem, który przytoczymy w skrócie. Wiązka równoległa, padająca na pierwszą soczewkę pod kątem α do osi, skupia się w jej płaszczyźnie ogniskowej w odległości $h_1 = \alpha f_1$ od osi. Dla drugiej soczewki podstawiamy do równania $1/f_2 = (1/x) + (1/y)$ zmienną x równą $d - f_1$, obliczamy $y = f_2(f_1 - d)/(f_1 + f_2 - d)$, a następnie h ze wzoru $h = -h_1 y/x$ (minus stąd, że zakładamy dodatni znak h po tej samej stronie osi, co h_1). Otrzymujemy $h = \alpha f_1 f_2/(f_1 + f_2 - d)$ i ogniskową układu $f = h/\alpha = f_1 f_2/(f_1 + f_2 - d)$. Widzimy, że zestaw Pstrykiewicza jest w pełni możliwy – dla małych d zdolności skupiające soczewek dodają się (tylko ten przypadek należy do programu szkolnego). Jeśli d jest natomiast bliskie sumy $f_1 + f_2$, to ogniskowa układu staje się dowolnie duża, a ponieważ d może zależeć od kolejności obiektywów (dłuższe lub krótsze tubusy), więc nawet rewelacyjny zestaw Kamerańskiego nie wydaje się sprzeczny z prawami optyki.

W powyższym rozumowaniu nie został wzięty pod uwagę warunek, że obraz wytworzony przez obiektyw fotograficzny musi być rzeczywisty (na kliszy). Gdy $f_1 + f_2 > d > f_1$, obraz jest rzeczywisty tylko dla przedmiotów bliskich obiektywowi, a dla przedmiotów odległych wiązka wychodząca z obiektywu będzie rozbieżna, czyli fotografowanie ich będzie niemożliwe. Z drugiej strony, dla $d > f_1 + f_2$ odległe przedmioty dadzą rzeczywisty obraz na kliszy, ale prosty (druga soczewka odwraca obraz rzeczywisty wytworzony przez pierwszą). Może Fotończyk i Kamerański chcą fotografować podwójnym obiektywem tylko biedronki i znaczki pocztowe, a może w ich aparatach są odrębne wizjery i nie przeszkadza im odwrócenie na kliszy?

Jeśli oba obiektywy składowe same są zestawami soczewek, to problem się komplikuje, ale większa liczba zmiennych stwarza nadzieję na osiągnięcie celów niedostępnych z pojedynczymi soczewkami. Autorowi nie udało się zbudować z dwóch obiektywów krótkoogniskowych obiektywu długoogniskowego dającego obraz rzeczywisty i odwrócony (jak w zwykłym obiektywie) przedmiotów odległych. Może ta sztuka uda się komuś z Czytelników?

Zadania z matematyki nr 311, 312

Redaguje Marcin E. KUCZMA

311. Znaleźć wszystkie funkcje niemalejące f, określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające warunek:

$$2f(x^2+y^2) = f(x)^2 + f(y)^2 \quad \text{dla} \quad x, y = 0, 1, 2, \ldots .$$

312. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których istnieje n-kąt foremny o wierzchołkach w punktach kratowych przestrzeni trójwymiarowej, to znaczy, w punktach (x, y, z), których współrzędne są liczbami całkowitymi (w ustalonym prostokątnym układzie współrzędnych).

Zadanie **312** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1995

Przypominamy treść zadań:

303. Wielościan wypukły W (o wszystkich kątach dwuściennych ostrych) ma następującą własność: istnieją takie liczby naturalne $p, q \geq 3$, że każdy przekrój wielościanu W płaszczyzną przecinającą wnętrze W jest albo p-kątem, albo q-kątem. Czy wielościan W musi być czworościanem?

304. Ciąg (b_n) jest dany wzorami: $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_n = (n+1)\left(\frac{b_{n-1}}{n} + \frac{b_{n-2}}{n-1}\right)$ dla $n \geq 2$. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$.

303. Wybierzmy dowolną ścianę S wielościanu W. Niech B, A, C będą trzema kolejnymi wierzchołkami tej ściany. Przez punkt C prowadzimy płaszczyznę γ tak położoną, by punkty A i B znalazły się po jednej jej stronie (punkt B – bliżej, punkt A – dalej od γ), a pozostałe wierzchołki W znalazły się po przeciwnej jej stronie. Poprowadźmy następnie trzy płaszczyzny α, β, δ równoległe do γ: płaszczyznę α przebiegającą pomiędzy punktami A i B, płaszczyznę β – pomiędzy punktami B i C, i płaszczyznę δ – pomiędzy punktem C a pozostałymi wierzchołkami wielościanu W.

Rozważymy dwa przypadki:
1°. Odcinek BC jest krawędzią wielościanu W (a zatem ściana S jest trójkątem).
2°. Odcinek BC nie jest krawędzią wielościanu W.

Przypuśćmy, że z wierzchołka A wychodzi a krawędzi wielościanu W, z wierzchołka B wychodzi b krawędzi, a z wierzchołka C wychodzi c krawędzi. Przekrój wielościanu W każdą z płaszczyzn α, β, γ, δ jest pewnym n-kątem; wartości n przedstawia tabelka:

	przypadek 1°	przypadek 2°
$W \cap \alpha$:	a	a
$W \cap \beta$:	$a+b-2$	$a+b-2$
$W \cap \gamma$:	$a+b-3$	$a+b-2$
$W \cap \delta$:	$a+b+c-6$	$a+b+c-4$

Zgodnie z założeniem, n może przybierać tylko dwie wartości. Wobec tego przypadek 2° jest niemożliwy (bo $a < a+b-2 < a+b+c-4$), natomiast w przypadku 1° wartości a oraz $a+b-3$ muszą być równe, skąd wynika, że $b = 3$.

Ponieważ ściana S była wybrana dowolnie, a także punkt B był dowolnie wybranym jej wierzchołkiem, zatem wszystkie ściany W są trójkątami, a z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie trzy krawędzie. To znaczy, że W jest czworościanem.

304. Określając $a_n = b_n/(n+1)$ mamy rekurencję: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, przy czym $a_0 = a_1 = 1$. Tak więc (a_n) jest ciągiem Fibonacciego:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right), \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Wobec tego

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)a_n}{2^n} = \frac{\alpha f(\alpha/2) - \beta f(\beta/2)}{\sqrt{5}},$$

gdzie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{d}{dx}\,\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(szeregi potęgowe zbieżne dla $x \in (-1; 1)$, różniczkowanie poprawne w tym przedziale). Jeśli więc λ jest jedną z liczb α, β, czyli jeśli $\lambda = \left(1 + \varepsilon\sqrt{5}\right)/2$, $\varepsilon = \pm 1$, to

$$\lambda f\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{4\lambda}{(2-\lambda)^2} = \frac{4 + 4\varepsilon\sqrt{5}}{7 - 3\varepsilon\sqrt{5}} = 22 + 10\varepsilon\sqrt{5},$$

a zatem szukana suma równa się

$$s = \frac{(22 + 10\sqrt{5}) - (22 - 10\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = 20.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 297 (WT=2,46) i 298 (WT=1,54)
z numeru 3/1995

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	45,17
Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,33
Piotr Lipiński	– Radom	36,05
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	34,92
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	34,89
Tomasz Kulpa	– Katowice	34,45

Weteran Przemek Gadziński w efektownym stylu kończy czwartą rundę!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 195 (WT=3,70) i 196 (WT=3,80)
z numeru 3/1995
oraz
zadań 197 (WT=3,22) i 198 (WT=3,76)
z numeru 4/1995

Artur Gawryszczak	– Dubeczno	38,30
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Aleksander Surma	– Myszków	30,14
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	23,31
Przemysław Gworys	– Częstochowa	21,24