Równanie zegarka

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Mam zegarek analogowy. Zegarek jest typu *Pobieda* i charakteryzuje się tym, że duża wskazówka jest prawie identycznej wielkości co mała. Wielokrotnie patrząc się na niego miałem wątpliwości, która z nich pełni jaką rolę. Nie zawsze jednak. Niekiedy sytuacja była klarowna. Na przykład o godzinie dokładnie piątej nie sposób się pomylić: najbliższa sensowna godzina wskazywana przez wskazówki zamienione rolami (godzinowa pokazuje minuty, a minutowa – godziny) to dwadzieścia pięć po dwunastej, ale wtedy, jeżeli przyjmiemy, że dolna wskazówka ma wskazywać dokładnie piątkę, to górna wskazówka powinna być prawie w połowie między dwunastą a pierwszą. Z kolei, na przykład, tuż przed w pół do dwunastej można się już zastanawiać, czy przypadkiem nie mamy do czynienia z mniej więcej za dwie i pół minuty szóstą.

Ciekawe, ile dokładnie jest takich mylących ustawień. Problem sformułujmy tak: dla zegarka analogowego, w którym obie wskazówki są nierozróżnialne, określić, ile razy w ciągu dwunastu godzin nie można mieć pewności co do pomiaru czasu.

Rozwiążemy ten problem odwołując się do ciekawego narzędzia, jakim jest wzór de Moivre'a ($(\cos\phi + i\sin\phi)^x = \cos\phi x + i\sin\phi x$), który znakomicie opisuje położenie wskazówek. Umieśćmy tarczę zegarka w płaszczyźnie zespolonej tak, żeby początek układu pokrywał się z osią zegarka, a końce wskazówek minutowej i godzinowej leżały na okręgu jednostkowym. Załóżmy też, aby być w zgodzie z „punktem zero", jakim jest godzina dwunasta oraz z kierunkiem obiegu wskazówek w tradycyjnych zegarkach, że oś rzeczywista jest skierowana do góry, a oś urojona – na prawo. Dwunasta to w naszym układzie godzina *jeden*.

Niech g oznacza liczbę zespoloną z okręgu jednostkowego, odpowiadającą położeniu wskazówki godzinowej, m zaś – minutowej. Ze względu na to, że wskazówka minutowa obiega środek zegarka dwunastokrotnie szybciej niż godzinowa, kąt, jaki zakreśla, jest dwunastokrotnie większy od godzinowego. Mamy zatem spełnione równanie zegarka

$$m = g^{12},$$

gdyż podnoszenie do potęgi na kole jednostkowym odpowiada, zgodnie ze wzorem de Moivre'a, odpowiedniemu zwielokrotnianiu kąta.

Wracając do naszego problemu: sytuacja, w której mamy wątpliwości, która z identycznych wskazówek pełni którą rolę, odpowiada jednoczesnemu spełnieniu dwóch równań: $m = g^{12}$ oraz $g = m^{12}$. Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymujemy $g = g^{144}$, a po podzieleniu przez g (różne od zera, jako że wzięte z okręgu jednostkowego) mamy $g^{143} = 1$. Rozwiązaniami tego równania są zatem wszystkie 143 pierwiastki z jedności, czyli wierzchołki 143-kąta foremnego o jednym wierzchołku w punkcie 1 (czyli o dwunastej). Oznacza to, że co 12/143 godziny mamy do czynienia z sytuacją niepewności.

W zasadzie powinniśmy odjąć jeszcze wszystkie te sytuacje, w których wskazówki się pokrywają (trudno się wtedy aż tak bardzo pomylić!). Ile jest takich sytuacji? Oczywiście, 11, co wie każdy, kto przeczytał *Lilavati*, ale możemy to też szybko wyprowadzić za pomocą naszego narzędzia. Wskazówki się pokryją, gdy wskazówka godzinowa będzie w tym samym położeniu co minutowa, czyli $g = g^{12}$, co po podzieleniu przez g daje $g^{11} = 1$, którego to równania rozwiązaniem jest wszystkie 11 odpowiednich pierwiastków z jedności.

Ostatecznie zatem sytuacje mylące następują tak naprawdę jedynie $143 - 11 = 132$ razy w ciągu 12 godzin.

Czasami budząc się nie wiem, czy patrzę na zegarek leżący na stoliku nocnym normalnie czy do góry nogami. Załóżmy, że tym razem zaopatrzeni jesteśmy w zegarek z dobrze rozróżnialnymi wskazówkami. Problemem jest więc jedynie stwierdzenie na podstawie samego oglądu tarczy, czy zegarek leży normalnie, czy jest odwrócony.

ich przyjmować bezkrytycznie. Oprócz przypływów pochodzących od Księżyca występują przypływy związane z działaniem grawitacyjnym Słońca na Ziemię. Relacje między przypływami słonecznymi i księżycowymi są dość złożone, czasem się wzmacniają, czasem osłabiają. Harold Jeffrey (1891–1989) wykazał w 1920 r., że różnica między obserwowaną wielkością μ a wartością otrzymaną przez Adamsa może być wyjaśniona przez uwzględnienie tarcia przypływowego w morzach Ziemi. Wywołane tym tarciem zwolnienie obrotu powoduje, według Jeffreya, przyspieszenie ruchu kątowego Księżca równe w przybliżeniu połowie przyspieszenia wyznaczonego z obserwacji.

Podejmowane były również próby uwzględnienia wpływu wzrostu masy Ziemi na ruch Księżyca. W szczególności Iwan Mieszczerski (1859–1935) obliczył w 1905 r., że powolny wzrost masy Ziemi powoduje przyspieszenie wiekowe w ruchu Księżyca. Efekt ten jest jednak nieznaczny. Według aktualnych danych na Ziemię spada 400 ton materii meteorytowej na dobę, co wywołuje przyspieszenie wiekowe w ruchu Księżyca równe $0'',0001$/wiek^2.

Pierwsze teorie ruchu Księżyca oparte na przybliżonym rozwiązaniu zagadnienia trzech ciał: Słońca, Ziemi i Księżyca, podali: Alexis Claude Clairaut (1713–1765), Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) i Leonhard Euler. Rozwinięciem prac d'Alemberta i Clairauta była teoria Laplace'a, który podał tablicę położeń Księżyca z dokładnością do $0',5$. W późniejszych latach teoria ruchu Księżyca była udoskonalana przez wielu matematyków i astronomów. Współczesne teorie ruchu naszego satelity są rozwinięciem teorii Delaunaya i George'a Hilla (1838–1914). Modyfikacją teorii Hilla jest ILE (skrót od *Improved Lunar Ephemeris*) podana przez W.J. Eckerta ze współpracownikami w 1954 r. Metoda ta ma charakter czysto numeryczny i odznacza się dużą dokładnością otrzymanej efemerydy Księżyca. Rozwinięciem analitycznej metody Delaunaya jest ALE (*Analytic Lunar Ephemeris*), którą uzyskali A. Deprit, J. Henrard i A. Rom w 1970 r. Teoria ruchu Księżyca rozważa jedynie siły grawitacyjne, a efekty niegrawitacyjne uwzględniane są za pomocą poprawek empirycznych.

Od chwili odkrycia przez Halleya wiekowego przyspieszenia Księżyca minęło 300 lat, a wciąż nie potrafimy odpowiedzieć na drugą część konkursowego pytania Akademii Paryskiej z 1770 r. Sytuacja ta jest typowa dla fizyki. Jest wiele problemów, na które nie potrafimy udzielić ścisłej odpowiedzi, mimo że znamy prawa rządzące danym zagadnieniem. Wynika to z faktu, że prawa w fizyce sformułowane są w języku równań różniczkowych, które są konsekwencją zasady najmniejszego działania. Niestety, równań tych nie umiemy rozwiązać nawet w wielu prostych sytuacjach fizycznych. Albert Einstein (1879–1955) ujął ten problem następująco: *Bóg stworzył świat według niecałkowalnych równań.*

Może powstać wątpliwość co do celowości tworzenia tak dokładnej teorii ruchu ciał Układu Słonecznego. Czy taka teoria może być wykorzystana? Oczywiście, rzetelność i precyzja mogą być celem samym w sobie. Należy jednak pamiętać, że dzięki dokładnej teorii ruchu planet Układu Słonecznego możliwe było stwierdzenie niewytłumaczalnego przez teorię klasyczną ruchu peryhelium Merkurego 60 lat przed sformułowaniem przez Einsteina ogólnej teorii względności. Urbain Joseph Leverrier (1811–1877), współodkrywca Neptuna, 12 września 1869 r. na posiedzeniu Akademii Paryskiej przedstawił list Herve Faye'a (1814–1902) opisujący wyniki obserwacji wykonanych przez autora listu. W liście zawarta była informacja o tajemniczym ruchu peryhelium Merkurego wynoszącym 38″/wiek. Leverrier rozważał możliwość istnienia niezidentyfikowanego ciała pomiędzy Słońcem i Merkurym. Ruch peryhelium Merkurego oraz innych ciał niebieskich jest przedmiotem badań od 1850 r. do chwili obecnej. Wartość 43″/wiek, otrzymana przez Simona Newcomba (1835–1909) dla Merkurego w 1882 r., jest aktualna do dzisiaj.

Obrót o 180 stopni odpowiada na płaszczyźnie zespolonej pomnożeniu liczby przez -1. Jeżeli zatem mielibyśmy wątpliwości, jak zorientowany jest zegarek, to powinna być spełniona para równań

$$m = g^{12} \quad \text{oraz} \quad -m = (-g)^{12},$$

gdyż zarówno na zegarku normalnym, jak i odwróconym chcemy widzieć poprawne ułożenie wskazówek. Ta para równań nie ma jednak rozwiązania na okręgu jednostkowym, zatem tylko jedno z nich może być prawdziwe. Oznacza to, że mając dostatecznie dobry wzrok nigdy nie popełnimy tego typu błędu. Radzę wszystkim posiadaczom zegarka spojrzeć na niego do góry nogami. Ręczę, że nikt nie zobaczy godziny, która jakkolwiek dałaby się sensownie zinterpretować.

Ciekawe, że znajomy Hindus, Raghu, kiedy rozmawiałem z nim o tej obserwacji, opowiedział mi, że w Indiach znany jest sposób szybkiego obliczania godziny, jaka panuje w danym momencie w stolicy Imperium. Należy mianowicie spojrzeć na zegarek do góry nogami i przesunąć wskazówkę godzinową w myślach do najbliższego sensownego położenia. Powiedzmy sobie, klarował mi Raghu, że mamy w Bombaju godzinę 10^{25}. Odwracamy zegarek i widzimy, że minutowa wskazówka pokazuje jakby „za 5 coś", a godzinowa leży mniej więcej w połowie między 4-tą a 5-tą. Popychamy więc ją w myślach do przodu i zgadujemy, że w Londynie jest za pięć piąta. Dlaczego do przodu, a nie do tyłu? – zapytałem. – Jeżeli jest mniej więcej tak samo dobrze do przodu, jak do tyłu, to popychamy do przodu – odpowiedział Raghu i zabraliśmy się za sprawdzanie tego fenomenu.

Różnica czasu między Bombajem a Londynem wynosi $5\frac{1}{2}$ godziny. (W Indiach, rozciągających się od 67° do 97° długości wschodniej, obowiązuje przez cały rok czas południka 82°, w przybliżeniu połowiącego ten wielki kraj.) Niech g_L oraz m_L oznaczają położenia wskazówek w Londynie, g_B i m_B zaś – w Bombaju. Wykażemy, że w Bombaju zawsze po odwróceniu zegarka do góry nogami oraz posunięciu samej wskazówki godzinowej o dokładnie pół godziny (czyli pomnożeniu jej przez $e^{\pi i/12}$) otrzymamy czas południka Greenwich. Aby tak było, muszą być spełnione równania:

$$g_L = -g_B e^{\pi i/12} \quad \text{oraz} \quad m_L = -m_B,$$

a jednocześnie musi być spełnione równanie zegarka dla Bombaju $m_B = g_B^{12}$. Sprawdźmy, czy będzie ono spełnione i dla Londynu. Korzystając ze wzoru Eulera, $e^{\pi i} = -1$, dostajemy

$$g_L^{12} = (-g_B e^{\pi i/12})^{12} = g_B^{12} e^{\pi i} = \\ = -g_B^{12} = -m_B = m_L.$$

Bomba! Zgodziło się. Oznacza to, że postępując w Bombaju w opisany sposób, zawsze otrzymamy poprawną godzinę, a ze względu na to, że wskazówka godzinowa została cofnięta w naszym algorytmie dokładnie o $5\frac{1}{2}$ godziny (6 godzin do tyłu przy obrocie zegarka i potem $\frac{1}{2}$ godziny do przodu), zawsze otrzymamy czas południka Greenwich. Widać stąd od razu, jak należy postępować w Londynie, żeby otrzymać czas indyjski.

Szybko rozwiążmy jeszcze parę małych problemów. Po pierwsze, oglądając zegarek w lustrze zobaczymy zawsze sensowną godzinę (oczywiście, zakładamy, że na cyferblacie żadnych cyfr nie ma). Dzieje się właśnie tak, gdyż lustrzane odbicie to nic innego, jak przekształcenie symetryczne względem osi rzeczywistej, odpowiadające operacji sprzężenia liczby zespolonej. A że $g^{12} = m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{g}^{12} = \bar{m}$, więc równanie zegarka będzie działało i dla „sprzężonej" tarczy. Radzę spojrzeć do lustra, aby się o tym przekonać.

Dalej, zakładając, że wskazówka sekundowa pokrywa się o godzinie 12 z dwiema pozostałymi, możemy wywnioskować, że taka sytuacja nie zdarzy się ponownie wcześniej niż za 12 godzin. Wystarczy zauważyć, że jeżeli s oznacza położenie wskazówki sekundowej, to dodatkowo $s = m^{60}$. Łatwo sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem układu równań $g = m = s$, $m = g^{12}$, $s = m^{60}$ jest $g = m = s = 1$, czyli godzina dwunasta.

W epoce zegarków cyfrowych warto czasami z sentymentem wrócić do dawnych dobrych czasów, kiedy to czas odmierzał się w sposób ciągły. Co prawda, ciągłość ta cokolwiek była naciągana, gdyż większość mechanizmów i tak popychała wskazówki „kwantami" ruchu, zgodnymi bądź to ze spadaniem ziarenek piasku, bądź z rytmem wahnięć wahadła czy też sprężynkowego włosa, ale dla niedoskonałego oka było to znakomitą namiastką ciągłości. A poza tym były też mechanizmy (jak choćby spalanie świecy czy przelewanie się wody), które z ciągłością miały naprawdę wiele wspólnego. Miganie cyferek szatkuje niepotrzebnie czas.