

# O aproksymacjach diofantycznych

Kazimierz SZYMICZEK

Artykuł jest skróconą i zmienioną wersją odczytu Autora na konferencji: *Aproksymacje – XIV Szkoła Matematyki Poglądowej, Miętne*, 27.01.–31.01.1995

Aproksymacje diofantyczne stanowią dział teorii liczb, którego głównym zagadnieniem jest badanie przybliżeń liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi. Na pierwszy rzut oka zagadnienie wydaje się trywialne, gdyż liczby wymierne leżą gęsto w zbiorze liczb rzeczywistych, można więc liczby rzeczywiste aproksymować liczbami wymiernymi z dowolną dokładnością. Ten pierwszy odruch na myśl o przybliżeniach wymiernych liczby rzeczywistej  $\theta$  można uściślić następująco:

*Dla każdej liczby rzeczywistej  $\theta$  i dla każdej liczby naturalnej  $q$  istnieje taka liczba całkowita  $p$ , że  $|\theta - p/q| < 1/q$ .*

Wystarczy bowiem oś liczbową podzielić na przedziały  $c/q \leq x < (c+1)/q$ , gdzie  $c$  jest dowolną liczbą całkowitą. Przedziały te mają długość  $1/q$  i liczba  $\theta$  należy do jednego z nich, powiedzmy  $p/q \leq \theta < (p+1)/q$ , dla pewnej liczby całkowitej  $p$ . A więc odległość  $\theta$  od liczby  $p/q$  jest mniejsza niż  $1/q$ .

Widzimy więc, że bardzo łatwo można stwierdzić istnienie przybliżenia liczby rzeczywistej liczbą wymierną o mianowniku  $q > 0$  z dokładnością  $1/q$ . Powstaje jednak natychmiast pytanie, czy jest możliwe aproksymowanie liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi o mianowniku  $q > 0$  z dokładnością lepszą niż  $1/q$ , powiedzmy z dokładnością  $1/q^2$  lub  $1/q^3$ ? Znalezienie wyczerpujących odpowiedzi na te pytania zajęło matematykom ponad 100 lat. Przedstawimy tutaj kilka charakterystycznych rezultatów z tego zakresu.

## Zasada szufladkowa i twierdzenie Dirichleta

Punktem wyjścia teorii aproksymacji diofantycznych jest następujące proste, ale nietrywialne twierdzenie Dirichleta.

Prawdopodobnie w dowodzie tego twierdzenia Dirichlet użył po raz pierwszy tak zwanej *zasady szufladkowej* Dirichleta. Zasada szufladkowa mówi, że jeśli mamy  $Q+1$  przedmiotów i są one umieszczone w  $Q$  szufladkach, to przynajmniej jedna z szufladek zawiera 2 przedmioty. Jest zadziwiające, że ta prosta zasada rozumowania ma w matematyce bardzo liczne i głębokie konsekwencje.

### **Twierdzenie 1** (P.G.L. Dirichlet, 1842)

*Niech  $\theta$  będzie liczbą rzeczywistą. Dla każdej liczby naturalnej  $Q > 1$  istnieją takie liczby całkowite  $p, q$ , że*

$$(1) \quad |q\theta - p| < 1/Q \quad \text{oraz} \quad 0 < q \leq Q.$$

**Dowód.** Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $\theta$  wprowadzamy oznaczenie  $\{\theta\}$  dla mantysy liczby  $\theta$ . A więc  $\{\theta\} = \theta - [\theta]$ , gdzie  $[\theta]$  oznacza część całkowitą liczby  $\theta$ , czyli największą liczbę całkowitą nie większą niż  $\theta$ . Używając tego oznaczenia rozpatrzmy  $Q+1$  liczb rzeczywistych

$$0 = \{0\theta\}, \{\theta\} = \{1\theta\}, \{2\theta\}, \dots, \{Q\theta\}.$$

Wszystkie one leżą w przedziale domknięto-otwartym  $[0, 1)$ . Przedział ten rozbijamy na  $Q$  „szufladek”, którymi są podprzedziały

$$i/Q \leq x < (i+1)/Q, \quad i = 0, 1, \dots, Q-1$$

o długości  $1/Q$ . A więc  $Q+1$  liczb  $\{i\theta\}$  leży w  $Q$  szufladkach.

## Czy Księżyc spadnie na Ziemię?

Stanisław KASPERCZUK

To z inicjatywy Edmonda Halleya (1656–1742), sławnego dzięki komedie nazwanej jego imieniem, Isaac Newton (1642–1727) napisał wreszcie liczące 700 stron dzieło *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* i przesłał je do Royal Society 28 kwietnia 1686 r. W dziele tym, według opinii Towarzystwa Królewskiego, przeprowadzony został matematyczny dowód hipotezy Mikołaja Kopernika (1473–1543) w formie podanej przez Johannesesa Keplera (1571–1630) oraz wyjaśnione zostały wszystkie ruchy planet na podstawie jednego założenia o ciążeniu odwrotnie proporcjonalnym do kwadratu odległości od środka Słońca. Towarzystwo podjęło decyzję o wydaniu dzieła Newtona na swój koszt, a odpowiedzialnym za jego wydrukowanie uczyniło Halleya. Niestety, jak się wkrótce okazało, druk kosztownego i niepoczytnego dzieła Francisa Willoughby’ego *The History of Fishes* zrujnowało Towarzystwo Królewskie i manuskrypt *Principiów* został skazany na zapomnienie. Na szczęście Halley był synem zamożnego producenta mydła, a przy tym człowiekiem wielkodusznym, więc wydał to wiekopomne, trzytomowe dzieło własnym sumptem. W tym czasie sytuacja finansowa Newtona była całkiem przyzwoita. Choć pensja profesora i wówczas nie była wysoka, to drugie tyle przynosiła mu odziedziczona farma w Woolsthorpe, gdzie rosła sławna jabłoń. Newton żył samotnie prowadząc oszczędny tryb życia, nie zamierzał jednak trwonić pieniędzy na wydanie księgi.

W dowód uznania dla osiągnięć naukowych Newtona królowa Anglii i Irlandii, Anna, nadała mu w 1705 r. tytuł szlachecki. Z tej okazji wraz z małżonkiem Jerzym, księciem Danii, i całym dworem odwiedziła Uniwersytet w Cambridge, by upamiętnić dzień przyznania szlachectwa najznakomitszemu ze swych poddanych. Następnie królowa wydała uroczyste przyjęcie na cześć Sir Isaaca Newtona, choć musiała pożyczyć na ten cel 500 funtów.

Przez wiele lat najtrudniejszym problemem astronomicznym była teoria ruchu Księżyca, który ze względu na bliskie sąsiedztwo Ziemi mógł być dokładnie obserwowany. Średnia długość ekliptyczna  $l$  (odpowiednik długości geograficznej, gdy podstawowym kołem układu współrzędnych jest ekliptyka) Księżyca

w ruchu niezaburzoną rośnię w czasie liniowo, a więc wyraża się wzorem:  $l = nt + l_0$ , gdzie  $n$  i  $l_0$  są pewnymi stałymi. W przypadku istnienia zaburzeń wzór powyższy trzeba uzupełnić o wyraz  $P$  reprezentujący spowodowane przez nie okresowe zmiany długości ekliptycznej Księżyca. Znając z obserwacji wartości  $l$  w trzech różnych epokach (tak astronomowie nazywają wyróżnione chwile, zwłaszcza gdy dzieli je duży odstęp czasu) otrzymamy:  $l_1 = nt_1 + l_0 + P_1$ ,  $l_2 = nt_2 + l_0 + P_2$ ,  $l_3 = nt_3 + l_0 + P_3$ . Z pierwszych dwóch i ostatnich dwóch równań dostajemy:

$$(1) \quad n = (l_2 - l_1 - P_2 + P_1)/(t_2 - t_1),$$

$$(2) \quad n = (l_3 - l_2 - P_3 + P_2)/(t_3 - t_2).$$

W przypadku planet Układu Słonecznego te dwa wyrażenia, (1) i (2), dają tę samą wartość  $n$  z wysoką dokładnością. Gdy analogiczne rozważania przeprowadzimy dla Księżyca, to okaże się, że wartości ze wzoru (1) i (2) nie pokrywają się. Fakt ten po raz pierwszy zauważył Halley w 1693 r. Dokładność wartości  $n$  otrzymanych ze wzorów (1) i (2) zależy od przedziałów czasowych  $t_2 - t_1$  i  $t_3 - t_2$ , dlatego Halley wybrał trzy epoki odległe możliwie najbardziej. Aby otrzymać dokładne wartości  $l$  dla czasów, gdy nie było jeszcze teleskopów, Halley wykorzystał zapisy o starożytnych zaćmieniach, bowiem podczas zaćmienia długość ekliptyczna Księżyca jest ściśle określona przez współrzędne Słońca. Jedną z grup zaćmień została wzięta z *Almagestu* Klaudiusza Ptolemeusza (około 100–168), drugą grupę stanowiły zaćmienia obserwowane przez astronomów arabskich w IX w. Trzecia epoka była współczesna Halleyowi. Stwierdził on, że w wyrażeniu na średnią długość ekliptyczną Księżyca występuje też wyraz z  $t^2$ . Mianowicie

$$(3) \quad l = nt + l_0 + \mu \left( \frac{t}{100} \right)^2 + P,$$

gdzie postać zależności od  $t^2$  wynika z faktu, że tradycyjnie  $t$  liczymy w latach, natomiast  $\mu$  w sekundach łuku na stulecie;  $\mu = 10''/\text{wiek}^2$ . Wielkość dwukrotnie większa to tzw. przyspieszenie wiekowe Księżyca (tak zresztą w astronomii nazywa się bardzo drobne, ale systematyczne odchyłki wszelkich ruchów od jednostajności). Jak mała jest to wartość, można zobrazować następująco: gdyby wskazówka sekundnika poruszała się z takim przyspieszeniem kątowym, to zegarek spieszyłby się o 1 s na 216 000 lat!

Ponieważ wiekowe przyspieszenie Księżyca zostało odkryte na drodze obserwacyjnej, powstał ważny problem, czy teoria ciężenia Newtona może wyjaśnić to zjawisko.

Istnieją więc dwie liczby  $\{r\theta\}$  i  $\{s\theta\}$ , gdzie  $r > s$ , leżące w tej samej szufladce, czyli w tym samym podprzedziale o długości  $1/Q$ . Biorąc różnicę dwóch takich liczb otrzymujemy

$$\{r\theta\} - \{s\theta\} = r\theta - [r\theta] - (s\theta - [s\theta]) = (r-s)\theta - ([r\theta] - [s\theta]) = q\theta - p,$$

gdzie  $q = r - s > 0$  i  $p = [r\theta] - [s\theta]$  są liczbami całkowitymi oraz  $|q\theta - p| = |\{r\theta\} - \{s\theta\}| < 1/Q$ . Istnieją więc liczby całkowite  $p, q$  spełniające nierówności (1).

Zauważmy, że jeśli  $p$  i  $q$  spełniają nierówności (1), to także  $|\theta - p/q| < 1/qQ \leq 1/q^2$ . A więc liczba wymierna  $p/q$  przybliża liczbę rzeczywistą  $\theta$  z dokładnością  $1/q^2$ , co jest znacznie lepszym rezultatem niż nasza pierwsza obserwacja o możliwości przybliżania liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi. Dokładniej, otrzymujemy następujący ważny wniosek.

**Wniosek 2.** Dla każdej liczby niewymiernej  $\theta$  istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych  $p, q$  spełniających nierówność

$$(2) \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

**Dowód.** Niech  $Q$  będzie liczbą naturalną i niech  $p, q$  spełniają nierówności (1). Wtedy liczby  $p, q$  spełniają także nierówność (2). Ponadto, ponieważ  $\theta$  jest liczbą niewymierną, mamy także  $0 < |q\theta - p|$ .

Istnieje więc taka liczba naturalna  $Q_1$ , że  $1/Q_1 < |q\theta - p|$ . Dla liczby  $Q_1$  dobieramy na podstawie twierdzenia Dirichleta liczby całkowite  $p_1, q_1$  spełniające nierówności

$$0 < |q_1\theta - p_1| < 1/Q_1 \quad \text{oraz} \quad 0 < q_1 \leq Q_1.$$

Wtedy mamy także  $|\theta - p_1/q_1| < 1/q_1^2$ , a więc  $p_1, q_1$  jest rozwiązaniem nierówności (2), i jest to rozwiązanie różne od rozwiązania  $p, q$ , gdyż  $|q_1\theta - p_1| < 1/Q_1 < |q\theta - p|$ .

Postępując tak samo z parą  $p_1, q_1$  znajdziemy rozwiązanie  $p_2, q_2$  nierówności (2) spełniające nierówności

$$|q_2\theta - p_2| < |q_1\theta - p_1| < |q\theta - p|.$$

Kontynuując to postępowanie znajdziemy dowolnie długi ciąg rozwiązań nierówności (2). Ma ona więc nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych  $p, q$ .

Natomiast jeśli liczba  $\theta$  jest wymierna,  $\theta = a/b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi oraz  $b > 0$ , to dla każdego liczb całkowitych  $p, q$ , takich, że  $\theta \neq p/q$  oraz  $q > 0$ , mamy

$$|\theta - p/q| = \left| \frac{aq - bp}{bq} \right| \geq \frac{1}{bq}.$$

Jeśli więc spełniona jest nierówność (2), to otrzymujemy  $1/bq \leq |\theta - p/q| < 1/q^2$ , skąd  $q < b$ . Stąd wynika, że nierówność (2) ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych  $p, q$ , takich, że  $\theta \neq p/q$ .

Za pomocą aparatu ułamków łańcuchowych można udowodnić, że każdą liczbę niewymierną  $\theta$  można aproksymować liczbami wymiernymi z nieco większą dokładnością niż dają rozwiązania nierówności (2). Mamy bowiem następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3** (A. Hurwitz, 1891)

Jeśli  $\theta$  jest liczbą niewymierną, to dla  $c = \sqrt{5}$  nierówność

$$(3) \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych  $p, q$ .

Ale dla  $c > \sqrt{5}$  istnieją liczby niewymierne  $\theta$ , dla których nierówność (3) ma tylko skończoną liczbę rozwiązań. Można wykazać, że taką liczbą jest  $\theta_1 = (\sqrt{5} + 1)/2$ , a także każda liczba z nią równoważna.

Tutaj liczbę  $\theta$  uważamy za *równoważną* z liczbą  $\alpha$ , jeśli istnieją takie liczby całkowite  $a, b, c, d$ , że

$$\theta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad \text{oraz} \quad ad - bc = \pm 1.$$

Można udowodnić, że dla wszystkich liczb niewymiernych nierównoważnych z liczbą  $\theta_1 = (\sqrt{5} + 1)/2$  istnieje nieskończenie wiele rozwiązań nierówności (3) ze stałą  $c = \sqrt{8}$ .

Tutaj historia się powtarza: dla niewymierności kwadratowej  $\theta_2 = \sqrt{2}$  i liczb z nią równoważnych nie można zamienić stałej  $\sqrt{8}$  na żadną liczbę większą, natomiast po usunięciu wszystkich liczb równoważnych z  $\theta_1$  i  $\theta_2$  dla wszystkich pozostałych liczb niewymiernych  $\theta$  nierówność (3) ma nieskończenie wiele rozwiązań ze stałą  $c = \sqrt{221}/5$ . Można udowodnić, że ten proces eliminowania pewnych niewymierności kwadratowych i powiększania stałej  $c$  jest nieskończony, jakkolwiek stała  $c$  zawsze spełnia nierówność  $c < 3$ .

Niewymiernością kwadratową nazywamy każdą liczbę niewymierną, która jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 2 o współczynnikach wymiernych.

J. Liouville zauważył w 1844 roku, że dla *każdej* niewymierności kwadratowej  $\theta$  istnieje taka stała  $c > 0$ , że nierówność (3) w ogóle nie ma żadnych rozwiązań w liczbach całkowitych  $p, q$ . Wyznacza to definitywną miarę możliwości przybliżania niewymierności kwadratowej  $\theta$  liczbami wymiernymi o mianowniku  $q$ : istnieje nieskończenie wiele przybliżeń  $p/q$  liczby  $\theta$  z dokładnością  $1/q^2$ , ale nie istnieją żadne przybliżenia  $p/q$  liczby  $\theta$  z dokładnością  $1/cq^2$ , gdzie  $c$  jest stałą zależną od  $\theta$ .

Rezultaty Liouville'a są znacznie ogólniejsze i dotyczą nie tylko rzeczywistych niewymierności kwadratowych, ale dowolnych rzeczywistych liczb algebraicznych.

Liczbą algebraiczną nazywa się każdą liczbę  $\theta$ , która jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, nierozkładalnego na wielomiany o współczynnikach wymiernych. Stopień takiego wielomianu zależy tylko od  $\theta$  i nazywa się *stopniem liczby*  $\theta$ .

### Aproksymacje liczb algebraicznych

Udowodnimy teraz twierdzenie Liouville'a orzekające, że liczby algebraicznej  $\theta$  stopnia  $n > 1$  nie można aproksymować liczbami wymiernymi o mianowniku  $q$  z dokładnością rzędu  $1/q^n$ .

**Twierdzenie 4** (J. Liouville, 1844)

Niech  $\theta$  będzie rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia  $n > 1$ . Wtedy istnieje taka stała  $c > 0$ , zależna od liczby  $\theta$ , że dla *każdej* liczby wymiernej  $p/q$ , takiej, że  $q > 0$  oraz  $|\theta - p/q| < 1$ , zachodzi nierówność

$$(4) \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{cq^n}.$$

**Dowód.** Niech  $f$  będzie takim wielomianem stopnia  $n$  o współczynnikach całkowitych, że  $f(\theta) = 0$ . Wtedy  $f$  nie ma pierwiastków wymiernych, zatem dla dowolnych liczb całkowitych  $p, q$ , gdzie  $q > 0$  mamy  $f(p/q) \neq 0$ . Ponadto,  $f(p/q)$  jest liczbą wymierną o mianowniku  $q^n$ , zatem  $|f(p/q)| \geq 1/q^n$ . Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia o wartości średniej, istnieje taka liczba rzeczywista  $a$  leżąca między  $p/q$  i  $\theta$ , że

$$f(p/q) = f(p/q) - f(\theta) = (p/q - \theta) \cdot f'(a).$$

Z założenia  $|p/q - \theta| < 1$  wynika, że  $a \in (\theta - 1, \theta + 1)$ . Pochodna  $f'$  wielomianu  $f$  jest ograniczona w każdym przedziale skończonym, niech więc  $c$  będzie taką liczbą rzeczywistą, że  $|f'(x)| < c$  dla każdego  $x$  w przedziale  $(\theta - 1, \theta + 1)$ . Mamy wówczas

$$\frac{1}{q^n} \leq |f(p/q)| < |p/q - \theta| \cdot c,$$

skąd otrzymujemy nierówność (4).

Zagadnieniem tym zajmowali się w następnych stuleciach najwybitniejsi fizycy i matematycy. Dlaczego sam Newton nie podjął próby rozwiązania tego problemu? Przecież w *Principiach* analizował wpływ Słońca na ruch Księżyca wokół Ziemi. W 1770 r. Akademia Paryska wyznaczyła nagrodę za zbadanie problemu, czy teoria grawitacji może wyjaśnić wiekowe przyspieszenie Księżyca oraz czy zmiana orbity Księżyca nie doprowadzi do jego upadku na Ziemię.

Leonhard Euler (1707–1783) w pracy konkursowej *Nowa teoria ruchu Księżyca* z 1772 r. doszedł do wniosku, że ta anomalia ruchu naszego satelity nie może być spowodowana wzajemnym oddziaływaniem Ziemi, Księżyca i Słońca. Stwierdził ponadto, że przyspieszenie wiekowe Księżyca nie jest wynikiem oddziaływania grawitacyjnego z jakimkolwiek ciałem niebieskim. Euler sądził, że znalazł bezpośredni dowód na istnienie eteru. Pisał: *Tak więc nie ma wątpliwości, że obserwowane przyspieszenie wiekowe Księżyca jest wynikiem oporu ośrodka, w którym zachodzi ruch ciał niebieskich*. Teoria Eulera, błędna w przypadku Księżyca, może być zastosowana do ruchu sztucznych satelitów Ziemi. W 1774 r. problem wiekowego przyspieszenia podjął Joseph Louis Lagrange (1736–1813), niestety bezskutecznie. Jednak ważnym wynikiem Lagrange'a było wykazanie, że na skutek oddziaływania innych planet Układu Słonecznego na Ziemię mimośród jej orbity zmienia się okresowo z okresem 24 000 lat. Współczesne obliczenia wykazują, że mimośród orbity Ziemi zmienia się w granicach od 0 do 0,067735.

W 1786 r. Pierre Simon de Laplace (1749–1827) podał wyjaśnienie pochodzenia wiekowego przyspieszenia w ruchu Księżyca. Badając ruch satelitów Jowisza Laplace zauważył, że zmiany mimośrodu jego orbity prowadzą do przyspieszenia ruchu tych satelitów w długości ekliptycznej. Zakładając, że zmiany mimośrodu orbity Ziemi prowadzą do analogicznego efektu w przypadku Księżyca, Laplace obliczył wielkość  $\mu$  wchodzącą do wzoru (3) otrzymując  $\mu = 10''18$ , co dobrze zgadzało się z wynikami obserwacji. Uznano więc, że zjawisko wiekowego przyspieszenia Księżyca zostało wyjaśnione zadowalająco.

Z obliczeń Laplace'a wynikało, że przyspieszenie średniego ruchu kąтового Księżyca wywołane jest efektami czysto grawitacyjnymi, dlatego zarówno średni ruch kątowy, jak i duża półoś orbity

Księżycy powinny wykonywać długookresowe oscylacje z okresem 24 000 lat. W tej sytuacji pojawienie się wyrażenia wiekowego  $\mu(t/100)^2$  we wzorze (3) może świadczyć jedynie o niedoskonałości aparatu matematycznego. Wydawało się, że problem konkursowy Akademii Paryskiej został definitywnie rozwiązany.

Jednakże John Couch Adams (1819–1892), współodkrywca Neptuna w 1845 r., wykazał, że obliczenia Laplace'a były niedokładne. Obliczona przez Adama w 1853 r. wartość  $\mu$  wynosiła  $5'',72/\text{wiek}^2$ , tzn. połowę obserwowanego przyspieszenia. Ta jaskrawa rozbieżność wyników teoretycznych i obserwacyjnych oznacza, że na Księżyc działają inne siły, nie mające charakteru grawitacyjnego. „Fakt ten – pisał Adams – może wskazywać nam drogę do ważnego odkrycia fizycznego”. W 1860 r. Charles Delaunay (1816–1872) przeprowadził obliczenia, które potwierdziły wynik uzyskany przez Adama.

Prawidłowe przypuszczenie co do przyczyn wiekowego przyspieszenia Księżyca wyraził sławny filozof z Królewca, Immanuel Kant (1724–1804). Stwierdził on, że obserwowany efekt powodują siły przyływowe w układzie Ziemia-Księżyc. (Na marginesie dodajmy, że równie celną odpowiedź znaleźć można w dziele Jonathana Swifta (1667–1745) *Podróże Guliwera*, gdzie autor stwierdza istnienie dwóch księżyców Marsa i dość precyzyjnie określa ich okresy obiegu wokół planety półtora wieku przed ich odkryciem.) W 1865 r. Delaunay przeprowadził analizę tego zagadnienia i potwierdził przypuszczenia Kanta. Udział sił przyływowych w ewolucji układu Ziemia-Księżyc został szczegółowo rozważony przez George'a Howarda Darwina (1845–1912), syna sławnego Charlesa Roberta. Przyływy obserwuje się nie tylko na morzach i oceanach, lecz również w skorupie i atmosferze Ziemi. Powierzchnia Ziemi wskutek przyływów księżycowych unosi się o kilkadziesiąt centymetrów. Darwin wykazał, że przyływy powodują tarcie we wnętrzu Ziemi i w konsekwencji prowadzą do zwolnienia jej obrotu wokół osi. Współczesne pomiary potwierdzają wiekowe zwalnianie obrotu Ziemi, a więc wydłużenie doby ziemskiej. Jest ono nieznaczne, wynosi bowiem  $0'',0015/\text{wiek}$ . Według Darwina zwalnianie obrotu Ziemi powoduje oddalanie się Księżyca od Ziemi, prowadzi zatem do efektu odwrotnego niż obserwowany obecnie. Rozważania Darwina nie są ścisłe i nie należy

**Przykład 5.** Jednym z najslawniejszych zastosowań twierdzenia Liouville'a jest dowód istnienia liczb przestępnych. Liczbę rzeczywistą nazywa się liczbą *przestępną*, jeśli nie jest ona pierwiastkiem żadnego (niezerowego) wielomianu o współczynnikach wymiernych. A więc liczba rzeczywista jest przestępna, jeśli nie jest liczbą algebraiczną.

Liouville podał następujący przykład liczby przestępnej. Niech

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!} = 0,11000100000000000000000100\dots$$

Wtedy mianownik  $n$ -tej sumy częściowej  $s_n = \sum_{i=1}^n 10^{-i!}$  jest równy  $q := q_n = 10^{n!}$ , jeśli więc licznik tej sumy oznaczymy  $p := p_n$ , to mamy nierówność

$$0 < \theta - \frac{p}{q} < \frac{2}{q^{n+1}}.$$

Gdyby  $\theta$  była liczbą algebraiczną stopnia  $N$ , to na podstawie twierdzenia Liouville'a mielibyśmy nierówność

$$\frac{1}{cq^N} < \theta - \frac{p}{q},$$

dla pewnej stałej  $c > 0$ . Stąd  $q^{n+1-N} < 2c$ . Ta nierówność ma zachodzić przy stałych  $c$  i  $N$  dla każdego naturalnego  $n$  oraz  $q = 10^{n!}$ , co jest sprzeczne. A więc  $\theta$  nie jest liczbą algebraiczną, jest więc liczbą przestępną.

**Wniosek 6.** *Jeśli  $\theta$  jest rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia  $n > 1$ , to dla każdej liczby  $\mu > n$  nierówność*

$$(5) \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu}$$

ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych  $p, q$ , gdzie  $q > 0$ .

**Dowód.** Przypuśćmy, że  $\mu = n + \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon > 0$ , i nasza nierówność ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wtedy istnieje stała  $c > 0$  spełniająca nierówność (4), zatem

$$\frac{1}{cq^n} < \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+\varepsilon}},$$

skąd  $q^\varepsilon < c$  dla nieskończenie wielu naturalnych  $q$ , sprzeczność.

Skończoność liczby rozwiązań nierówności (5) interpretujemy jako niemożliwość aproksymowania liczby algebraicznej stopnia  $n$  liczbami wymiernymi  $p/q$  z dokładnością  $1/q^\mu$  dla  $\mu > n$ . Czy jednak nie istnieje możliwość znalezienia nieskończenie wielu rozwiązań nierówności (5), gdy załadamy nieco mniejszej dokładności? Okazuje się, że nawet dość znaczne zmniejszenie liczby  $\mu$  nie zmienia sytuacji, którą opisujemy zwięźle mówiąc, że liczby algebraiczne nie dają się dobrze przybliżać liczbami wymiernymi.

Oto tabela wskazująca autorów kolejnych rekordów w wyznaczeniu najmniejszej liczby  $\mu$  gwarantującej skończoność liczby rozwiązań nierówności (5) dla liczby algebraicznej  $\theta$  stopnia  $n$

|                  |                          |                              |                   |
|------------------|--------------------------|------------------------------|-------------------|
| Liouville (1844) | $\mu > n$                | Dyson (1947), Gelfond (1948) | $\mu > \sqrt{2n}$ |
| Thue (1909)      | $\mu > \frac{1}{2}n + 1$ | Roth (1955)                  | $\mu > 2$         |
| Siegel (1921)    | $\mu > 2\sqrt{n}$        |                              |                   |

Twierdzenie Rotha uniezależniło ostatecznie liczbę  $\mu$  od stopnia  $n$  liczby algebraicznej  $\theta$ . Brzmi ono następująco:

**Twierdzenie 7** (K.F. Roth, 1955)

*Niech  $\theta$  będzie rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia  $> 1$ . Wtedy dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  nierówność*

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych  $p, q$ .

Klaus F. Roth otrzymał za ten rezultat Medal Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Edynburgu w 1958 roku.