O aproksymacjach diofantycznych

Kazimierz SZYMICZEK

Artykuł jest skróconą i zmienioną wersją odczytu Autora na konferencji: Aproksymacje – XIV Szkoła Matematyki Poglądowej, Miętne, 27.01.–31.01.1995

Aproksymacje diofantyczne stanowią dział teorii liczb, którego głównym zagadnieniem jest badanie przybliżeń liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi. Na pierwszy rzut oka zagadnienie wydaje się trywialne, gdyż liczby wymierne leżą gęsto w zbiorze liczb rzeczywistych, można więc liczby rzeczywiste aproksymować liczbami wymiernymi z dowolną dokładnością. Ten pierwszy odruch na myśl o przybliżeniach wymiernych liczby rzeczywistej θ można uściślić następująco:

Dla każdej liczby rzeczywistej θ i dla każdej liczby naturalnej q istnieje taka liczba całkowita p, że $|\theta - p/q| < 1/q$.

Wystarczy bowiem oś liczbową podzielić na przedziały $c/q \leq x < (c+1)/q$, gdzie c jest dowolną liczbą całkowitą. Przedziały te mają długość $1/q$ i liczba θ należy do jednego z nich, powiedzmy $p/q \leq \theta < (p+1)/q$, dla pewnej liczby całkowitej p. A więc odległość θ od liczby p/q jest mniejsza niż $1/q$.

Widzimy więc, że bardzo łatwo można stwierdzić istnienie przybliżenia liczby rzeczywistej liczbą wymierną o mianowniku $q > 0$ z dokładnością $1/q$. Powstaje jednak natychmiast pytanie, czy jest możliwe aproksymowanie liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi o mianowniku $q > 0$ z dokładnością lepszą niż $1/q$, powiedzmy z dokładnością $1/q^2$ lub $1/q^3$? Znalezienie wyczerpujących odpowiedzi na te pytania zajęło matematykom ponad 100 lat. Przedstawimy tutaj kilka charakterystycznych rezultatów z tego zakresu.

Zasada szufladkowa i twierdzenie Dirichleta

Punktem wyjścia teorii aproksymacji diofantycznych jest następujące proste, ale nietrywialne twierdzenie Dirichleta.

Prawdopodobnie w dowodzie tego twierdzenia Dirichlet użył po raz pierwszy tak zwanej *zasady szufladkowej* Dirichleta. Zasada szufladkowa mówi, że jeśli mamy $Q+1$ przedmiotów i są one umieszczone w Q szufladkach, to przynajmniej jedna z szufladek zawiera 2 przedmioty. Jest zadziwiające, że ta prosta zasada rozumowania ma w matematyce bardzo liczne i głębokie konsekwencje.

Twierdzenie 1 (P.G.L. Dirichlet, 1842)
Niech θ będzie liczbą rzeczywistą. Dla każdej liczby naturalnej $Q > 1$ istnieją takie liczby całkowite p, q, że

$$(1) \qquad |q\theta - p| < 1/Q \quad \text{oraz} \quad 0 < q \leq Q\,.$$

Dowód. Dla dowolnej liczby rzeczywistej θ wprowadzamy oznaczenie $\{\theta\}$ dla mantysy liczby θ. A więc $\{\theta\} = \theta - [\theta]$, gdzie $[\theta]$ oznacza część całkowitą liczby θ, czyli największą liczbę całkowitą nie większą niż θ. Używając tego oznaczenia rozpatrzmy $Q+1$ liczb rzeczywistych

$$0 = \{0\theta\},\ \{\theta\} = \{1\theta\},\ \{2\theta\},\ \ldots,\ \{Q\theta\}\,.$$

Wszystkie one leżą w przedziale domknięto-otwartym $[0,1)$. Przedział ten rozbijamy na Q „szufladek”, którymi są podprzedziały

$$i/Q \leq x < (i+1)/Q, \quad i = 0, 1, \ldots, Q-1$$

o długości $1/Q$. A więc $Q+1$ liczb $\{i\theta\}$ leży w Q szufladkach.

Czy Księżyc spadnie na Ziemię?

Stanisław KASPERCZUK

To z inicjatywy Edmonda Halleya (1656–1742), sławnego dzięki komecie nazwanej jego imieniem, Isaac Newton (1642–1727) napisał wreszcie liczące 700 stron dzieło *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* i przesłał je do Royal Society 28 kwietnia 1686 r. W dziele tym, według opinii Towarzystwa Królewskiego, przeprowadzony został matematyczny dowód hipotezy Mikołaja Kopernika (1473–1543) w formie podanej przez Johannesa Keplera (1571–1630) oraz wyjaśnione zostały wszystkie ruchy planet na podstawie jednego założenia o ciążeniu odwrotnie proporcjonalnym do kwadratu odległości od środka Słońca. Towarzystwo podjęło decyzję o wydaniu dzieła Newtona na swój koszt, a odpowiedzialnym za jego wydrukowanie uczyniło Halleya. Niestety, jak się wkrótce okazało, druk kosztownego i niepoczytnego dzieła Francisa Willoughby'ego *The History of Fishes* zrujnował Towarzystwo Królewskie i manuskrypt *Principiów* został skazany na zapomnienie. Na szczęście Halley był synem zamożnego producenta mydła, a przy tym człowiekiem wielkodusznym, więc wydał to wiekopomne, trzytomowe dzieło własnym sumptem. W tym czasie sytuacja finansowa Newtona była całkiem przyzwoita. Choć pensja profesora i wówczas nie była wysoka, to drugie tyle przynosiła mu odziedziczona farma w Woolsthorpe, gdzie rosła sławna jabłoń. Newton żył samotnie prowadząc oszczędny tryb życia, nie zamierzał jednak trwonić pieniędzy na wydanie księgi.

W dowód uznania dla osiągnięć naukowych Newtona królowa Anglii i Irlandii, Anna, nadała mu w 1705 r. tytuł szlachecki. Z tej okazji wraz z małżonkiem Jerzym, księciem Danii, i całym dworem odwiedziła Uniwersytet w Cambridge, by upamiętnić dzień przyznania szlachectwa najznakomitszemu ze swych poddanych. Następnie królowa wydała uroczyste przyjęcie na cześć Sir Isaaca Newtona, choć musiała pożyczyć na ten cel 500 funtów.

Przez wiele lat najtrudniejszym problemem astronomicznym była teoria ruchu Księżyca, który ze względu na bliskie sąsiedztwo Ziemi mógł być dokładnie obserwowany. Średnia długość ekliptyczna l (odpowiednik długości geograficznej, gdy podstawowym kołem układu współrzędnych jest ekliptyka) Księżyca w ruchu niezaburzonym rośnie w czasie liniowo, a więc wyraża się wzorem: $l = nt + l_0$, gdzie n i l_o są pewnymi stałymi. W przypadku istnienia zaburzeń wzór powyższy trzeba uzupełnić o wyraz P reprezentujący spowodowane przez nie okresowe zmiany długości ekliptycznej Księżyca. Znając z obserwacji wartości l w trzech różnych epokach (tak astronomowie nazywają wyróżnione chwile, zwłaszcza gdy dzieli je duży odstęp czasu) otrzymamy: $l_1 = nt_1 + l_0 + P_1$, $l_2 = nt_2 + l_0 + P_2$, $l_3 = nt_3 + l_0 + P_3$. Z pierwszych dwóch i ostatnich dwóch równań dostajemy:

(1) $\quad n = (l_2 - l_1 - P_2 + P_1)/(t_2 - t_1)\,,$

(2) $\quad n = (l_3 - l_2 - P_3 + P_2)/(t_3 - t_2)\,.$

W przypadku planet Układu Słonecznego te dwa wyrażenia, (1) i (2), dają tę samą wartość n z wysoką dokładnością. Gdy analogiczne rozważania przeprowadzimy dla Księżyca, to okaże się, że wartości ze wzoru (1) i (2) nie pokrywają się. Fakt ten po raz pierwszy zauważył Halley w 1693 r. Dokładność wartości n otrzymanych ze wzorów (1) i (2) zależy od przedziałów czasowych $t_2 - t_1$ i $t_3 - t_2$, dlatego Halley wybrał trzy epoki odległe możliwie najbardziej. Aby otrzymać dokładne wartości l dla czasów, gdy nie było jeszcze teleskopów, Halley wykorzystał zapisy o starożytnych zaćmieniach, bowiem podczas zaćmienia długość ekliptyczna Księżyca jest ściśle określona przez współrzędne Słońca. Jedna z grup zaćmień została wzięta z *Almagestu* Klaudiusza Ptolemeusza (około 100–168), drugą grupę stanowiły zaćmienia obserwowane przez astronomów arabskich w IX w. Trzecia epoka była współczesna Halleyowi. Stwierdził on, że w wyrażeniu na średnią długość ekliptyczną Księżyca występuje też wyraz z t^2. Mianowicie

(3) $\quad l = nt + l_0 + \mu\left(\dfrac{t}{100}\right)^2 + P\,,$

gdzie postać zależności od t^2 wynika z faktu, że tradycyjnie t liczymy w latach, natomiast μ w sekundach łuku na stulecie; $\mu = 10''/\text{wiek}^2$. Wielkość dwukrotnie większa to tzw. przyspieszenie wiekowe Księżyca (tak zresztą w astronomii nazywa się bardzo drobne, ale systematyczne odchyłki wszelkich ruchów od jednostajności). Jak mała jest to wartość, można zobrazować następująco: gdyby wskazówka sekundnika poruszała się z takim przyspieszeniem kątowym, to zegarek spieszyłby się o 1 s na 216 000 lat!

Ponieważ wiekowe przyspieszenie Księżyca zostało odkryte na drodze obserwacyjnej, powstał ważny problem, czy teoria ciążenia Newtona może wyjaśnić to zjawisko.

Istnieją więc dwie liczby $\{r\theta\}$ i $\{s\theta\}$, gdzie $r > s$, leżące w tej samej szufladce, czyli w tym samym podprzedziale o długości $1/Q$. Biorąc różnicę dwóch takich liczb otrzymujemy

$$\{r\theta\} - \{s\theta\} = r\theta - [r\theta] - (s\theta - [s\theta]) = (r-s)\theta - ([r\theta] - [s\theta]) = q\theta - p\,,$$

gdzie $q = r - s > 0$ i $p = [r\theta] - [s\theta]$ są liczbami całkowitymi oraz $|q\theta - p| = |\{r\theta\} - \{s\theta\}| < 1/Q$. Istnieją więc liczby całkowite p, q spełniające nierówności (1).

Zauważmy, że jeśli p i q spełniają nierówności (1), to także $|\theta - p/q| < 1/qQ \le 1/q^2$. A więc liczba wymierna p/q przybliża liczbę rzeczywistą θ z dokładnością $1/q^2$, co jest znacznie lepszym rezultatem niż nasza pierwsza obserwacja o możliwości przybliżania liczb rzeczywistych liczbami wymiernymi. Dokładniej, otrzymujemy następujący ważny wniosek.

Wniosek 2. *Dla każdej liczby niewymiernej θ istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych p, q spełniających nierówność*

(2) $$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\,.$$

Dowód. Niech Q będzie liczbą naturalną i niech p, q spełniają nierówności (1). Wtedy liczby p, q spełniają także nierówność (2). Ponadto, ponieważ θ jest liczbą niewymierną, mamy także $0 < |q\theta - p|$.

Istnieje więc taka liczba naturalna Q_1, że $1/Q_1 < |q\theta - p|$. Dla liczby Q_1 dobieramy na podstawie twierdzenia Dirichleta liczby całkowite p_1, q_1 spełniające nierówności

$$0 < |q_1\theta - p_1| < 1/Q_1 \quad \text{oraz} \quad 0 < q_1 \le Q_1\,.$$

Wtedy mamy także $|\theta - p_1/q_1| < 1/q_1^2$, a więc p_1, q_1 jest rozwiązaniem nierówności (2), i jest to rozwiązanie różne od rozwiązania p, q, gdyż $|q_1\theta - p_1| < 1/Q_1 < |q\theta - p|$.

Postępując tak samo z parą p_1, q_1 znajdziemy rozwiązanie p_2, q_2 nierówności (2) spełniające nierówności

$$|q_2\theta - p_2| < |q_1\theta - p_1| < |q\theta - p|\,.$$

Kontynuując to postępowanie znajdziemy dowolnie długi ciąg rozwiązań nierówności (2). Ma ona więc nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych p, q.

Natomiast jeśli liczba θ jest wymierna, $\theta = a/b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi oraz $b > 0$, to dla każdych liczb całkowitych p, q, takich, że $\theta \ne p/q$ oraz $q > 0$, mamy

$$|\theta - p/q| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \ge \frac{1}{bq}\,.$$

Jeśli więc spełniona jest nierówność (2), to otrzymujemy $1/bq \le |\theta - p/q| < 1/q^2$, skąd $q < b$. Stąd wynika, że nierówność (2) ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych p, q, takich, że $\theta \ne p/q$.

Za pomocą aparatu ułamków łańcuchowych można udowodnić, że każdą liczbę niewymierną θ można aproksymować liczbami wymiernymi z nieco większą dokładnością niż dają rozwiązania nierówności (2). Mamy bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 (A. Hurwitz, 1891)
Jeśli θ jest liczbą niewymierną, to dla $c = \sqrt{5}$ nierówność

(3) $$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych p, q.

Ale dla $c > \sqrt{5}$ istnieją liczby niewymierne θ, dla których nierówność (3) ma tylko skończoną liczbę rozwiązań. Można wykazać, że taką liczbą jest $\theta_1 = (\sqrt{5}+1)/2$, a także każda liczba z nią *równoważna*.

Tutaj liczbę θ uważamy za *równoważną* z liczbą α, jeśli istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, że

$$\theta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad \text{oraz} \quad ad - bc = \pm 1\,.$$

Można udowodnić, że dla wszystkich liczb niewymiernych nierównoważnych z liczbą $\theta_1 = (\sqrt{5}+1)/2$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań nierówności (3) ze stałą $c = \sqrt{8}$.

Tutaj historia się powtarza: dla niewymierności kwadratowej $\theta_2 = \sqrt{2}$ i liczb z nią równoważnych nie można zamienić stałej $\sqrt{8}$ na żadną liczbę większą, natomiast po usunięciu wszystkich liczb równoważnych z θ_1 i θ_2 dla wszystkich pozostałych liczb niewymiernych θ nierówność (3) ma nieskończenie wiele rozwiązań ze stałą $c = \sqrt{221}/5$. Można udowodnić, że ten proces eliminowania pewnych niewymierności kwadratowych i powiększania stałej c jest nieskończony, jakkolwiek stała c zawsze spełnia nierówność $c < 3$.

Niewymiernością kwadratową nazywamy każdą liczbę niewymierną, która jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 2 o współczynnikach wymiernych.

J. Liouville zauważył w 1844 roku, że dla *każdej* niewymierności kwadratowej θ istnieje taka stała $c > 0$, że nierówność (3) w ogóle nie ma żadnych rozwiązań w liczbach całkowitych p, q. Wyznacza to definitywną miarę możliwości przybliżania niewymierności kwadratowej θ liczbami wymiernymi o mianowniku q: istnieje nieskończenie wiele przybliżeń p/q liczby θ z dokładnością $1/q^2$, ale nie istnieją żadne przybliżenia p/q liczby θ z dokładnością $1/cq^2$, gdzie c jest stałą zależną od θ.

Rezultaty Liouville'a są znacznie ogólniejsze i dotyczą nie tylko rzeczywistych niewymierności kwadratowych, ale dowolnych rzeczywistych liczb algebraicznych.

Liczbą algebraiczną nazywa się każdą liczbę θ, która jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, nierozkładalnego na wielomiany o współczynnikach wymiernych. Stopień takiego wielomianu zależy tylko od θ i nazywa się *stopniem liczby* θ.

Aproksymacje liczb algebraicznych

Udowodnimy teraz twierdzenie Liouville'a orzekające, że liczby algebraicznej θ stopnia $n > 1$ nie można aproksymować liczbami wymiernymi o mianowniku q z dokładnością rzędu $1/q^n$.

Twierdzenie 4 (J. Liouville, 1844)
Niech θ będzie rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$. Wtedy istnieje taka stała $c > 0$, zależna od liczby θ, że dla każdej liczby wymiernej p/q, takiej, że $q > 0$ oraz $|\theta - p/q| < 1$, zachodzi nierówność

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{cq^n}\,. \tag{4}$$

Dowód. Niech f będzie takim wielomianem stopnia n o współczynnikach całkowitych, że $f(\theta) = 0$. Wtedy f nie ma pierwiastków wymiernych, zatem dla dowolnych liczb całkowitych p, q, gdzie $q > 0$ mamy $f(p/q) \neq 0$. Ponadto, $f(p/q)$ jest liczbą wymierną o mianowniku q^n, zatem $|f(p/q)| \geq 1/q^n$. Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia o wartości średniej, istnieje taka liczba rzeczywista a leżąca między p/q i θ, że

$$f(p/q) = f(p/q) - f(\theta) = (p/q - \theta) \cdot f'(a)\,.$$

Z założenia $|p/q - \theta| < 1$ wynika, że $a \in (\theta - 1, \theta + 1)$. Pochodna f' wielomianu f jest ograniczona w każdym przedziale skończonym, niech więc c będzie taką liczbą rzeczywistą, że $|f'(x)| < c$ dla każdego x w przedziale $(\theta - 1, \theta + 1)$. Mamy wówczas

$$\frac{1}{q^n} \leq |f(p/q)| < |p/q - \theta| \cdot c\,,$$

skąd otrzymujemy nierówność (4).

Zagadnieniem tym zajmowali się w następnych stuleciach najwybitniejsi fizycy i matematycy. Dlaczego sam Newton nie podjął próby rozwiązania tego problemu? Przecież w *Principiach* analizował wpływ Słońca na ruch Księżyca wokół Ziemi. W 1770 r. Akademia Paryska wyznaczyła nagrodę za zbadanie problemu, czy teoria grawitacji może wyjaśnić wiekowe przyspieszenie Księżyca oraz czy zmiana orbity Księżyca nie doprowadzi do jego upadku na Ziemię.

Leonhard Euler (1707–1783) w pracy konkursowej *Nowa teoria ruchu Księżyca* z 1772 r. doszedł do wniosku, że ta anomalia ruchu naszego satelity nie może być spowodowana wzajemnym oddziaływaniem Ziemi, Księżyca i Słońca. Stwierdził ponadto, że przyspieszenie wiekowe Księżyca nie jest wynikiem oddziaływania grawitacyjnego z jakimkolwiek ciałem niebieskim. Euler sądził, że znalazł bezpośredni dowód na istnienie eteru. Pisał: *Tak więc nie ma wątpliwości, że obserwowane przyspieszenie wiekowe Księżyca jest wynikiem oporu ośrodka, w którym zachodzi ruch ciał niebieskich.* Teoria Eulera, błędna w przypadku Księżyca, może być zastosowana do ruchu sztucznych satelitów Ziemi. W 1774 r. problem wiekowego przyspieszenia podjął Joseph Louis Lagrange (1736–1813), niestety bezskutecznie. Jednak ważnym wynikiem Lagrange'a było wykazanie, że na skutek oddziaływania innych planet Układu Słonecznego na Ziemię mimośród jej orbity zmienia się okresowo z okresem 24 000 lat. Współczesne obliczenia wykazują, że mimośród orbity Ziemi zmienia się w granicach od 0 do 0,067735.

W 1786 r. Pierre Simon de Laplace (1749–1827) podał wyjaśnienie pochodzenia wiekowego przyspieszenia w ruchu Księżyca. Badając ruch satelitów Jowisza Laplace zauważył, że zmiany mimośrodu jego orbity prowadzą do przyspieszenia ruchu tych satelitów w długości ekliptycznej. Zakładając, że zmiany mimośrodu orbity Ziemi prowadzą do analogicznego efektu w przypadku Księżyca, Laplace obliczył wielkość μ wchodzącą do wzoru (3) otrzymując $\mu = 10\overset{\prime\prime}{.}18$, co dobrze zgadzało się z wynikami obserwacji. Uznano więc, że zjawisko wiekowego przyspieszenia Księżyca zostało wyjaśnione zadowalająco.

Z obliczeń Laplace'a wynikało, że przyspieszenie średniego ruchu kątowego Księżyca wywołane jest efektami czysto grawitacyjnymi, dlatego zarówno średni ruch kątowy, jak i duża półoś orbity

Księżyca powinny wykonywać długookresowe oscylacje z okresem 24 000 lat. W tej sytuacji pojawienie się wyrażenia wiekowego $\mu(t/100)^2$ we wzorze (3) może świadczyć jedynie o niedoskonałości aparatu matematycznego. Wydawało się, że problem konkursowy Akademii Paryskiej został definitywnie rozwiązany.

Jednakże John Couch Adams (1819–1892), współodkrywca Neptuna w 1845 r., wykazał, że obliczenia Laplace'a były niedokładne. Obliczona przez Adamsa w 1853 r. wartość μ wynosiła $5{,}''72/\text{wiek}^2$, tzn. połowę obserwowanego przyspieszenia. Ta jaskrawa rozbieżność wyników teoretycznych i obserwacyjnych oznacza, że na Księżyc działają inne siły, nie mające charakteru grawitacyjnego. „Fakt ten – pisał Adams – może wskazywać nam drogę do ważnego odkrycia fizycznego". W 1860 r. Charles Delaunay (1816–1872) przeprowadził obliczenia, które potwierdziły wynik uzyskany przez Adamsa.

Prawidłowe przypuszczenie co do przyczyn wiekowego przyspieszenia Księżyca wyraził sławny filozof z Królewca, Immanuel Kant (1724–1804). Stwierdził on, że obserwowany efekt powodują siły przypływowe w układzie Ziemia-Księżyc. (Na marginesie dodajmy, że równie celną przepowiednię znaleźć można w dziele Jonathana Swifta (1667–1745) *Podróże Guliwera*, gdzie autor stwierdza istnienie dwóch księżyców Marsa i dość precyzyjnie określa ich okresy obiegu wokół planety półtora wieku przed ich odkryciem.) W 1865 r. Delaunay przeprowadził analizę tego zagadnienia i potwierdził przypuszczenia Kanta. Udział sił przypływowych w ewolucji układu Ziemia-Księżyc został szczegółowo rozważony przez George'a Howarda Darwina (1845–1912), syna sławnego Charlesa Roberta. Przypływy obserwuje się nie tylko na morzach i oceanach, lecz również w skorupie i atmosferze Ziemi. Powierzchnia Ziemi wskutek przypływów księżycowych unosi się o kilkadziesiąt centymetrów. Darwin wykazał, że przypływy powodują tarcie we wnętrzu Ziemi i w konsekwencji prowadzą do zwolnienia jej obrotu wokół osi. Współczesne pomiary potwierdzają wiekowe zwalnianie obrotu Ziemi, a więc wydłużenie doby ziemskiej. Jest ono nieznaczne, wynosi bowiem $0{,}''0015/\text{wiek}$. Według Darwina zwalnianie obrotu Ziemi powoduje oddalanie się Księżyca od Ziemi, prowadzi zatem do efektu odwrotnego niż obserwowany obecnie. Rozważania Darwina nie są ścisłe i nie należy

Przykład 5. Jednym z najsławniejszych zastosowań twierdzenia Liouville'a jest dowód istnienia liczb przestępnych. Liczbę rzeczywistą nazywa się liczbą *przestępną*, jeśli nie jest ona pierwiastkiem żadnego (niezerowego) wielomianu o współczynnikach wymiernych. A więc liczba rzeczywista jest przestępna, jeśli nie jest liczbą algebraiczną.

Liouville podał następujący przykład liczby przestępnej. Niech

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!} = 0{,}110001000000000000000001000\ldots.$$

Wtedy mianownik n-tej sumy częściowej $s_n = \sum_{i=1}^{n} 10^{-i!}$ jest równy $q := q_n = 10^{n!}$, jeśli więc licznik tej sumy oznaczymy $p := p_n$, to mamy nierówność

$$0 < \theta - \frac{p}{q} < \frac{2}{q^{n+1}}.$$

Gdyby θ była liczbą algebraiczną stopnia N, to na podstawie twierdzenia Liouville'a mielibyśmy nierówność

$$\frac{1}{cq^N} < \theta - \frac{p}{q},$$

dla pewnej stałej $c > 0$. Stąd $q^{n+1-N} < 2c$. Ta nierówność ma zachodzić przy stałych c i N dla każdego naturalnego n oraz $q = 10^{n!}$, co jest sprzeczne. A więc θ nie jest liczbą algebraiczną, jest więc liczbą przestępną.

Wniosek 6. *Jeśli θ jest rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$, to dla każdej liczby $\mu > n$ nierówność*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\mu}} \tag{5}$$

ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych p, q, gdzie $q > 0$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\mu = n + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$, i nasza nierówność ma nieskończnie wiele rozwiązań. Wtedy istnieje stała $c > 0$ spełniająca nierówność (4), zatem

$$\frac{1}{cq^n} < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+\varepsilon}},$$

skąd $q^{\varepsilon} < c$ dla nieskończenie wielu naturalnych q, sprzeczność.

Skończoność liczby rozwiązań nierówności (5) interpretujemy jako niemożliwość aproksymowania liczby algebraicznej stopnia n liczbami wymiernymi p/q z dokładnością $1/q^{\mu}$ dla $\mu > n$. Czy jednak nie istnieje możliwość znalezienia nieskończenie wielu rozwiązań nierówności (5), gdy zażądamy nieco mniejszej dokładności? Okazuje się, że nawet dość znaczne zmniejszenie liczby μ nie zmienia sytuacji, którą opisujemy zwięźle mówiąc, że liczby algebraiczne nie dają się dobrze przybliżać liczbami wymiernymi.

Oto tabela wskazująca autorów kolejnych rekordów w wyznaczeniu najmniejszej liczby μ gwarantującej skończoność liczby rozwiązań nierówności (5) dla liczby algebraicznej θ stopnia n

Liouville (1844)	$\mu > n$	Dyson (1947), Gelfond (1948)	$\mu > \sqrt{2n}$
Thue (1909)	$\mu > \frac{1}{2}n + 1$	Roth (1955)	$\mu > 2$
Siegel (1921)	$\mu > 2\sqrt{n}$		

Twierdzenie Rotha uniezależniło ostatecznie liczbę μ od stopnia n liczby algebraicznej θ. Brzmi ono następująco:

Twierdzenie 7 (K.F. Roth, 1955)
Niech θ będzie rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia > 1. Wtedy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ nierówność

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych p, q.

Klaus F. Roth otrzymał za ten rezultat Medal Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Edynburgu w 1958 roku.

Równanie zegarka

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Mam zegarek analogowy. Zegarek jest typu *Pobieda* i charakteryzuje się tym, że duża wskazówka jest prawie identycznej wielkości co mała. Wielokrotnie patrząc się na niego miałem wątpliwości, która z nich pełni jaką rolę. Nie zawsze jednak. Niekiedy sytuacja była klarowna. Na przykład o godzinie dokładnie piątej nie sposób się pomylić: najbliższa sensowna godzina wskazywana przez wskazówki zamienione rolami (godzinowa pokazuje minuty, a minutowa – godziny) to dwadzieścia pięć po dwunastej, ale wtedy, jeżeli przyjmiemy, że dolna wskazówka ma wskazywać dokładnie piątkę, to górna wskazówka powinna być prawie w połowie między dwunastą a pierwszą. Z kolei, na przykład, tuż przed w pół do dwunastej można się już zastanawiać, czy przypadkiem nie mamy do czynienia z mniej więcej za dwie i pół minuty szóstą.

Ciekawe, ile dokładnie jest takich mylących ustawień. Problem sformułujmy tak: dla zegarka analogowego, w którym obie wskazówki są nierozróżnialne, określić, ile razy w ciągu dwunastu godzin nie można mieć pewności co do pomiaru czasu.

Rozwiążemy ten problem odwołując się do ciekawego narzędzia, jakim jest wzór de Moivre'a ($(\cos\phi + i\sin\phi)^x = \cos\phi x + i\sin\phi x$), który znakomicie opisuje położenie wskazówek. Umieśćmy tarczę zegarka w płaszczyźnie zespolonej tak, żeby początek układu pokrywał się z osią zegarka, a końce wskazówek minutowej i godzinowej leżały na okręgu jednostkowym. Załóżmy też, aby być w zgodzie z „punktem zero", jakim jest godzina dwunasta oraz z kierunkiem obiegu wskazówek w tradycyjnych zegarkach, że oś rzeczywista jest skierowana do góry, a oś urojona – na prawo. Dwunasta to w naszym układzie godzina *jeden*.

Niech g oznacza liczbę zespoloną z okręgu jednostkowego, odpowiadającą położeniu wskazówki godzinowej, m zaś – minutowej. Ze względu na to, że wskazówka minutowa obiega środek zegarka dwunastokrotnie szybciej niż godzinowa, kąt, jaki zakreśla, jest dwunastokrotnie większy od godzinowego. Mamy zatem spełnione równanie zegarka

$$m = g^{12},$$

gdyż podnoszenie do potęgi na kole jednostkowym odpowiada, zgodnie ze wzorem de Moivre'a, odpowiedniemu zwielokrotnianiu kąta.

Wracając do naszego problemu: sytuacja, w której mamy wątpliwości, która z identycznych wskazówek pełni którą rolę, odpowiada jednoczesnemu spełnieniu dwóch równań: $m = g^{12}$ oraz $g = m^{12}$. Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymujemy $g = g^{144}$, a po podzieleniu przez g (różne od zera, jako że wzięte z okręgu jednostkowego) mamy $g^{143} = 1$. Rozwiązaniami tego równania są zatem wszystkie 143 pierwiastki z jedności, czyli wierzchołki 143-kąta foremnego o jednym wierzchołku w punkcie 1 (czyli o dwunastej). Oznacza to, że co 12/143 godziny mamy do czynienia z sytuacją niepewności.

W zasadzie powinniśmy odjąć jeszcze wszystkie te sytuacje, w których wskazówki się pokrywają (trudno się wtedy aż tak bardzo pomylić!). Ile jest takich sytuacji? Oczywiście, 11, co wie każdy, kto przeczytał *Lilavati*, ale możemy to też szybko wyprowadzić za pomocą naszego narzędzia. Wskazówki się pokryją, gdy wskazówka godzinowa będzie w tym samym położeniu co minutowa, czyli $g = g^{12}$, co po podzieleniu przez g daje $g^{11} = 1$, którego to równania rozwiązaniem jest wszystkie 11 odpowiednich pierwiastków z jedności.

Ostatecznie zatem sytuacje mylące następują tak naprawdę jedynie $143 - 11 = 132$ razy w ciągu 12 godzin.

Czasami budząc się nie wiem, czy patrzę na zegarek leżący na stoliku nocnym normalnie czy do góry nogami. Załóżmy, że tym razem zaopatrzeni jesteśmy w zegarek z dobrze rozróżnialnymi wskazówkami. Problemem jest więc jedynie stwierdzenie na podstawie samego oglądu tarczy, czy zegarek leży normalnie, czy jest odwrócony.

ich przyjmować bezkrytycznie. Oprócz przypływów pochodzących od Księżyca występują przypływy związane z działaniem grawitacyjnym Słońca na Ziemię. Relacje między przypływami słonecznymi i księżycowymi są dość złożone, czasem się wzmacniają, czasem osłabiają. Harold Jeffrey (1891–1989) wykazał w 1920 r., że różnica między obserwowaną wielkością μ a wartością otrzymaną przez Adamsa może być wyjaśniona przez uwzględnienie tarcia przypływowego w morzach Ziemi. Wywołane tym tarciem zwolnienie obrotu powoduje, według Jeffreya, przyspieszenie ruchu kątowego Księżca równe w przybliżeniu połowie przyspieszenia wyznaczonego z obserwacji.

Podejmowane były również próby uwzględnienia wpływu wzrostu masy Ziemi na ruch Księżyca. W szczególności Iwan Mieszczerski (1859–1935) obliczył w 1905 r., że powolny wzrost masy Ziemi powoduje przyspieszenie wiekowe w ruchu Księżyca. Efekt ten jest jednak nieznaczny. Według aktualnych danych na Ziemię spada 400 ton materii meteorytowej na dobę, co wywołuje przyspieszenie wiekowe w ruchu Księżyca równe $0\overset{\prime\prime}{.}0001/\text{wiek}^2$.

Pierwsze teorie ruchu Księżyca oparte na przybliżonym rozwiązaniu zagadnienia trzech ciał: Słońca, Ziemi i Księżyca, podali: Alexis Claude Clairaut (1713–1765), Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) i Leonhard Euler. Rozwinięciem prac d'Alemberta i Clairauta była teoria Laplace'a, który podał tablicę położeń Księżyca z dokładnością do $0\overset{\prime}{.}5$. W późniejszych latach teoria ruchu Księżyca była udoskonalana przez wielu matematyków i astronomów. Współczesne teorie ruchu naszego satelity są rozwinięciem teorii Delaunaya i George'a Hilla (1838–1914). Modyfikacją teorii Hilla jest ILE (skrót od *Improved Lunar Ephemeris*) podana przez W.J. Eckerta ze współpracownikami w 1954 r. Metoda ta ma charakter czysto numeryczny i odznacza się dużą dokładnością otrzymanej efemerydy Księżyca. Rozwinięciem analitycznej metody Delaunaya jest ALE (*Analytic Lunar Ephemeris*), którą uzyskali A. Deprit, J. Henrard i A. Rom w 1970 r. Teoria ruchu Księżyca rozważa jedynie siły grawitacyjne, a efekty niegrawitacyjne uwzględniane są za pomocą poprawek empirycznych.

Od chwili odkrycia przez Halleya wiekowego przyspieszenia Księżyca minęło 300 lat, a wciąż nie potrafimy odpowiedzieć na drugą część konkursowego pytania Akademii Paryskiej z 1770 r. Sytuacja ta jest typowa dla fizyki. Jest wiele problemów, na które nie potrafimy udzielić ścisłej odpowiedzi, mimo że znamy prawa rządzące danym zagadnieniem. Wynika to z faktu, że prawa w fizyce sformułowane są w języku równań różniczkowych, które są konsekwencją zasady najmniejszego działania. Niestety, równań tych nie umiemy rozwiązać nawet w wielu prostych sytuacjach fizycznych. Albert Einstein (1879–1955) ujął ten problem następująco: *Bóg stworzył świat według niecałkowalnych równań.*

Może powstać wątpliwość co do celowości tworzenia tak dokładnej teorii ruchu ciał Układu Słonecznego. Czy taka teoria może być wykorzystana? Oczywiście, rzetelność i precyzja mogą być celem samym w sobie. Należy jednak pamiętać, że dzięki dokładnej teorii ruchu planet Układu Słonecznego możliwe było stwierdzenie niewytłumaczalnego przez teorię klasyczną ruchu peryhelium Merkurego 60 lat przed sformułowaniem przez Einsteina ogólnej teorii względności. Urbain Joseph Leverrier (1811–1877), współodkrywca Neptuna, 12 września 1869 r. na posiedzeniu Akademii Paryskiej przedstawił list Herve Faye'a (1814–1902) opisujący wyniki obserwacji wykonanych przez autora listu. W liście zawarta była informacja o tajemniczym ruchu peryhelium Merkurego wynoszącym 38″/wiek. Leverrier rozważał możliwość istnienia niezidentyfikowanego ciała pomiędzy Słońcem i Merkurym. Ruch peryhelium Merkurego oraz innych ciał niebieskich jest przedmiotem badań od 1850 r. do chwili obecnej. Wartość 43″/wiek, otrzymana przez Simona Newcomba (1835–1909) dla Merkurego w 1882 r., jest aktualna do dzisiaj.

Obrót o 180 stopni odpowiada na płaszczyźnie zespolonej pomnożeniu liczby przez -1. Jeżeli zatem mielibyśmy wątpliwości, jak zorientowany jest zegarek, to powinna być spełniona para równań

$$m = g^{12} \quad \text{oraz} \quad -m = (-g)^{12},$$

gdyż zarówno na zegarku normalnym, jak i odwróconym chcemy widzieć poprawne ułożenie wskazówek. Ta para równań nie ma jednak rozwiązania na okręgu jednostkowym, zatem tylko jedno z nich może być prawdziwe. Oznacza to, że mając dostatecznie dobry wzrok nigdy nie popełnimy tego typu błędu. Radzę wszystkim posiadaczom zegarka spojrzeć na niego do góry nogami. Ręczę, że nikt nie zobaczy godziny, która jakkolwiek dałaby się sensownie zinterpretować.

Ciekawe, że znajomy Hindus, Raghu, kiedy rozmawiałem z nim o tej obserwacji, opowiedział mi, że w Indiach znany jest sposób szybkiego obliczania godziny, jaka panuje w danym momencie w stolicy Imperium. Należy mianowicie spojrzeć na zegarek do góry nogami i przesunąć wskazówkę godzinową w myślach do najbliższego sensownego położenia. Powiedzmy sobie, klarował mi Raghu, że mamy w Bombaju godzinę 10^{25}. Odwracamy zegarek i widzimy, że minutowa wskazówka pokazuje jakby „za 5 coś", a godzinowa leży mniej więcej w połowie między 4-tą a 5-tą. Popychamy więc ją w myślach do przodu i zgadujemy, że w Londynie jest za pięć piąta. Dlaczego do przodu, a nie do tyłu? – zapytałem. – Jeżeli jest mniej więcej tak samo dobrze do przodu, jak do tyłu, to popychamy do przodu – odpowiedział Raghu i zabraliśmy się za sprawdzanie tego fenomenu.

Różnica czasu między Bombajem a Londynem wynosi $5\frac{1}{2}$ godziny. (W Indiach, rozciągających się od 67° do 97° długości wschodniej, obowiązuje przez cały rok czas południka 82°, w przybliżeniu połowiącego ten wielki kraj.) Niech g_L oraz m_L oznaczają położenia wskazówek w Londynie, g_B i m_B zaś – w Bombaju. Wykażemy, że w Bombaju zawsze po odwróceniu zegarka do góry nogami oraz posunięciu samej wskazówki godzinowej o dokładnie pół godziny (czyli pomnożeniu jej przez $e^{\pi i/12}$) otrzymamy czas południka Greenwich. Aby tak było, muszą być spełnione równania:

$$g_L = -g_B e^{\pi i/12} \quad \text{oraz} \quad m_L = -m_B,$$

a jednocześnie musi być spełnione równanie zegarka dla Bombaju $m_B = g_B^{12}$. Sprawdźmy, czy będzie ono spełnione i dla Londynu. Korzystając ze wzoru Eulera, $e^{\pi i} = -1$, dostajemy

$$g_L^{12} = (-g_B e^{\pi i/12})^{12} = g_B^{12} e^{\pi i} = $$
$$= -g_B^{12} = -m_B = m_L.$$

Bomba! Zgodziło się. Oznacza to, że postępując w Bombaju w opisany sposób, zawsze otrzymamy poprawną godzinę, a ze względu na to, że wskazówka godzinowa została cofnięta w naszym algorytmie dokładnie o $5\frac{1}{2}$ godziny (6 godzin do tyłu przy obrocie zegarka i potem $\frac{1}{2}$ godziny do przodu), zawsze otrzymamy czas południka Greenwich.

Widać stąd od razu, jak należy postępować w Londynie, żeby otrzymać czas indyjski.

Szybko rozwiążmy jeszcze parę małych problemów. Po pierwsze, oglądając zegarek w lustrze zobaczymy zawsze sensowną godzinę (oczywiście, zakładamy, że na cyferblacie żadnych cyfr nie ma). Dzieje się właśnie tak, gdyż lustrzane odbicie to nic innego, jak przekształcenie symetryczne względem osi rzeczywistej, odpowiadające operacji sprzężenia liczby zespolonej. A że $g^{12} = m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{g}^{12} = \bar{m}$, więc równanie zegarka będzie działało i dla „sprzężonej" tarczy. Radzę spojrzeć do lustra, aby się o tym przekonać.

Dalej, zakładając, że wskazówka sekundowa pokrywa się o godzinie 12 z dwiema pozostałymi, możemy wywnioskować, że taka sytuacja nie zdarzy się ponownie wcześniej niż za 12 godzin. Wystarczy zauważyć, że jeżeli s oznacza położenie wskazówki sekundowej, to dodatkowo $s = m^{60}$. Łatwo sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem układu równań $g = m = s$, $m = g^{12}$, $s = m^{60}$ jest $g = m = s = 1$, czyli godzina dwunasta.

W epoce zegarków cyfrowych warto czasami z sentymentem wrócić do dawnych dobrych czasów, kiedy to czas odmierzał się w sposób ciągły. Co prawda, ciągłość ta cokolwiek była naciągana, gdyż większość mechanizmów i tak popychała wskazówki „kwantami" ruchu, zgodnymi bądź to ze spadaniem ziarenek piasku, bądź z rytmem wahnięć wahadła czy też sprężynkowego włosa, ale dla niedoskonałego oka było to znakomitą namiastką ciągłości. A poza tym były też mechanizmy (jak choćby spalanie świecy czy przelewanie się wody), które z ciągłością miały naprawdę wiele wspólnego. Miganie cyferek szatkuje niepotrzebnie czas.