O tunelowaniu w gwiazdach

Aleksander SCHWARZENBERG-CZERNY

Wydajność słonecznego źródła energii

Słońce musi mieć niebagatelny zapas energii. Wprawdzie na mocy wzoru Einsteina całkowity zapas energii Słońca, czyli jego tzw. energia spoczynkowa, wynosi $E = M_\odot c^2$, jednak jest to czysta teoria, bowiem jego wykorzystanie wymagałoby całkowitego zniszczenia materii słonecznej i jej zamiany na energię. W praktyce wszelkie znane i nie znane reakcje chemiczne nie są w stanie dostarczyć więcej niż 10^{-8} energii spoczynkowej, bo tyle tylko energii wiązania elektronów zawierają atomy. Energia cieplna gazu słonecznego jest jeszcze mniejsza. Wiek Słońca nie może być mniejszy niż wiek okrążającej je Ziemi. Geologowie określają wiek t najstarszych skał na Ziemi na prawie 4 miliardy lat ($t \approx 10^{17}$ s). Podstawą do określenia ich wieku jest porównanie w nich zawartości promieniotwórczych izotopów uranu i ich produktów rozpadu. Im więcej tych ostatnich, tym starsza jest skała. Jasność $L_\odot \approx 2 \times 10^{33}$ erg/s na pewno nie uległa znaczącej zmianie w ciągu ostatniego miliarda lat, gdyż byłoby to zabójcze dla rozwijającego się w tym czasie życia. W czasie t Słońce zdołało już zużyć $L_\odot t / M_\odot c^2 \approx 0{,}0002$ tej energii. Tak duży ułamek masy spoczynkowej może być zamieniony na energię w reakcjach atomowych, w których jest wyzwalana energia wiązania jąder.

Zamiana wodoru w hel

Uranu i podobnych ciężkich pierwiastków jest w Słońcu tak mało, że podobny do zachodzącego w reaktorach atomowych ich rozpad dałby jeszcze mniej energii niż reakcje chemiczne. Słońce, tak jak większość Wszechświata, składa się głównie z wodoru. Mało jest tam izotopów wodoru używanych w bombach termojądrowych, czyli deuteru i trytu, ale za to jest obfitość zwykłego wodoru, czyli po prostu protonów. Następne po protonie trwałe lekkie jądro to deuter. Jednak do powstania deuteru potrzebne są temperatury na tyle wysokie, że z łatwością zachodzą dalsze reakcje zamiany deuteru w hel. Efektem kilkuetapowej reakcji w Słońcu jest zatem zamiana protonów w hel. Ta reakcja termojądrowa jest też źródłem energii podtrzymującym świecenie Słońca.

Oddziaływania między cząstkami elementarnymi

Znamy cztery rodzaje podstawowych oddziaływań: grawitacyjne, elektromagnetyczne, słabe jądrowe i silne jądrowe. Grawitacja nie odgrywa roli w mikroświecie cząstek i więcej o niej nie wspomnimy. O elektromagnetyzmie będzie jeszcze mowa. Silne oddziaływanie jądrowe, niby super klej, trzyma razem protony i neutrony (czyli nukleony) w jądrach. Jednak siła tego oddziaływania spada do zera już po niewielkim rozsunięciu nukleonów, zupełnie jak siła kleju. Cząstki nie naładowane są niewrażliwe na oddziaływania elektromagnetyczne, a lekkie cząstki, jak elektrony i neutrina (tzw. leptony), są zupełnie niewrażliwe na oddziaływania silne. Wzajemne oddziaływanie nie naładowanych nukleonów i leptonów może się odbywać jedynie za pomocą tzw. sił słabych. Właśnie ten typ oddziaływań odpowiada za rozpady β jąder atomowych.

Elektrostatyczna bariera potencjału

Na dużych odległościach cząstki elementarne odczuwają jedynie siły elektromagnetyczne. Przy łączeniu się jąder siły te sprowadzają się do odpychania elektrostatycznego równoimiennych ładunków. Zanim dojdzie do zbliżenia reagujących jąder, tak by mogło nastąpić ich połączenie oddziaływaniem silnym, musi zostać pokonana bariera odpychania elektrostatycznego o typowej energii $V \approx 1000$ keV. Choć temperatura wnętrza Słońca, wynosząca około 10^7 K, jest olbrzymia, to dostępna w zderzeniach energia termicznych ruchów cząstek $kT \approx 1$ keV jest dalece niewystarczająca do pokonania bariery odpychania elektrostatycznego i bezpośredniego zetknięcia zderzających się cząstek. Do pokonania przez cząstki tej bariery, a zatem do reakcji termojądrowych, nie doszłoby, gdyby nie efekt kwantowy zwany tunelowaniem.

Tunelowanie przez barierę potencjału

Tak małe czastki jak jądra atomowe nie podlegają prawom fizyki klasycznej, lecz fizyce kwantowej. Na mocy jednej z zasad fizyki kwantowej, tzw. zasady nieoznaczoności Heisenberga, cząstkom kwantowym nie można ściśle przypisać jednej wartości energii E w jednym momencie t. Można jedynie powiedzieć, że w przedziale czasu Δt nieoznaczoność energii cząstki ΔE musi być taka, by spełniony był warunek

Rozwiązanie zadania M 750.
Oznaczmy wynik n-tego rzutu przez X_n, a wynik całego eksperymentu przez X. Ponieważ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$, więc $EX = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{10}$. Wykażemy, że EX_n nie zależy od wyboru liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ dla żadnego n, a zatem dobór tych liczb nie wpływa w ogóle na wartość EX. Istotnie, n-ty rzut wykonujemy z prawdopodobieństwem $(5/6)^{n-1}$ (tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy w żadnym z poprzednich rzutów nie zaszło zdarzenie $X_i = a_i$), zatem

$$EX_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{7}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 751. Tak. Połóżmy nasz prostokąt w dowolnym miejscu szachownicy w ten sposób, by jego boki tworzyły żądane kąty z krawędziami pól. Załóżmy, że ułożenie to nie spełnia warunków zadania, a więc na zakrytej powierzchni przeważa któryś z kolorów, powiedzmy, że biały. Przesuńmy prostokąt po szachownicy w kierunku równoległym do krawędzi jej pól o wektor równy długości boku pola szachownicy. Otrzymamy sytuację bliźniaczo podobną do wyjściowej, tyle że kolory pól „zamienią się miejscami". Na zakrytej powierzchni będzie teraz przeważał kolor czarny. Ponieważ jednak dokonaliśmy naszego przesunięcia w sposób ciągły, więc w którymś momencie podczas przesuwania prostokąt musiał spełniać warunki zadania.

Rozwiązanie zadania M 752.
Zauważmy najpierw, że największy składnik sumy S, liczba $1995^{1995^{1995}}$, jest sześcianem liczby

$$a = 1995^{665 \cdot 1995^{1994}}.$$

Mamy też, oczywiście,

$$\sum_{n=1}^{1994} n^{n^n} < 1994 \cdot 1994^{1994^{1994}} = 1994^{1+1994^{1994}} < a.$$

Zatem

$$a^3 = 1995^{1995^{1995}} < S < a^3 + a < (a+1)^3.$$

Stąd już natychmiast wynika, że S nie jest sześcianem żadnej liczby naturalnej.
Uwaga. W podobny sposób można udowodnić, że liczba S nie jest piątą potęgą żadnej liczby naturalnej.

Rozwiązanie zadania F 413. Jedyne siły działające na oba punkty to siły reakcji więzów, które nie zmieniają całkowitej energii układu. Różniczkując względem czasu równanie

$$x^2 + y^2 = A^2$$

otrzymujemy

$$\dot{y} = -\frac{\dot{x}x}{y} = -\frac{\dot{x}x}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Całkowita energia jest równa

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mA^2\frac{\dot{x}^2}{A^2 - x^2} = \frac{1}{2}mu^2,$$

gdzie u jest prędkością punktu przechodzącego przez początek układu współrzędnych (drugi w tym czasie spoczywa). Różniczkując ostatnie równanie względem czasu dostajemy

$$\ddot{x} + \left(\frac{u}{A}\right)^2 x = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości drgań

$$\omega = \frac{u}{A}.$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że A jest amplitudą drgań. Ponieważ u możemy wybrać dowolnie, częstość drgań paradoksalnie zależy od amplitudy, inaczej niż dla „zwykłego" oscylatora harmonicznego.

Rozwiązanie zadania F 414. Oznaczmy przez S pole powierzchni okładek, przez x odległość między nimi. Siła przyciągania między okładkami jest równa

$$F = \frac{1}{2}QE,$$

gdzie Q jest ładunkiem na okładce, E – natężeniem pola. Zgodnie z prawem Gaussa $Q = \varepsilon_0 ES$, a zatem

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SE^2.$$

Natężenie pola jest równe $E = U/x$, czyli

$$(*) \qquad F = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2x^2}.$$

Siła przyciągania elektrostatycznego jest równoważona przez siłę parcia gazu $F = pS$. Dostajemy więc

$$pV^2 = \frac{\varepsilon_0 U^2 S^2}{2} = \text{const}.$$

Z pierwszej zasady termodynamiki dla jednego mola gazu mamy

$$\mathrm{d}Q = c_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V.$$

Korzystając z równania przemiany i równania Clapeyrona dostajemy

$$p\,\mathrm{d}V = -\mathrm{R}\,\mathrm{d}T,$$

czyli

$$\mathrm{d}Q = (c_V - \mathrm{R})\,\mathrm{d}T.$$

Ciepło przemiany wynosi więc $c_V - \mathrm{R} > 0$.

Uwaga. Równanie $(*)$ można otrzymać także różniczkując względem x energię pola elektrostatycznego kondensatora.

$\Delta E \Delta t \geq h$. Jedynie wartości średnie parametrów spełniają podstawowe prawa fizyki, jak np. prawo zachowania energii. Wynika z tego, że w dostatecznie krótkim czasie $\Delta t \approx h/V$ energia zderzających się jąder może różnić się od wartości średniej o więcej niż wynosi bariera potencjału $\Delta E \geq V$. Ponieważ energia ta może być zarówno większa jak i mniejsza, to prawdopodobieństwo uzyskania energii większej niż potrzeba do pokonania bariery elektrostatycznej V w czasie Δt nie może być większe niż $0{,}5 \approx e^{-0{,}69}$. Z drugiej strony nie może być ono zbyt małe, bowiem średnia wartość amplitudy fluktuacji ΔE powinna być dostatecznie duża by spełniać zasadę nieoznaczoności. Z dokładnej teorii wynika, że prawdopodobieństwo to wynosi $P_{\Delta t} \approx e^{-2\pi}$. Zauważmy też, że bariera potencjału wywołana odpychaniem ładunków jądrowych q jest dosyć rozległa; przy średniej wysokości V jej charakterystyczny promień wynosi $r \approx q^2/V$. Czas potrzebny do przebycia całej bariery wynosi zatem $\Delta T \approx r/v \approx q^2/Vv$, gdzie v jest średnią prędkością cząstki. Na ogół jest on znacznie dłuższy niż Δt. Aby więc cząstka mogła pokonać barierę potencjału, potrzeba by w $\Delta T/\Delta t$ kolejnych fluktuacjach energia cząstki odchylała się od wartości średniej o co najmniej V. Prawdopodobieństwo serii takich zdarzeń, czyli prawdopodobieństwo tunelowania całej bariery, jest iloczynem prawdopodobieństw, a więc wynosi $P_{\Delta T} \approx (P_{\Delta T})^{(\Delta T/\Delta t)} \approx e^{-2\pi q^2/hv}$. Wyrażone w zależności od energii kinetycznej $E = mv^2/2$ prawdopodobieństwo to wynosi $P_{\Delta t} \approx e^{-\sqrt{E_G/E}}$, gdzie energia $E_G = 2(\pi q^2/hc)^2 mc^2$ na cześć twórcy teorii jest zwana energią Gamowa, a tzw. masa zredukowana cząstek $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ uwzględnia przeniesienie układu odniesienia do ich środka masy.

Szybkość tunelowania

Liczba zachodzących reakcji będzie zależała od iloczynu prawdopodobieństwa tunelowania i liczby cząstek o odpowiedniej energii, $R \approx P_{\Delta T}\Delta N$. Z kinetycznej teorii gazów wiadomo, że składowe prędkości cząstek mają rozkład normalny, czyli Gaussa. Odpowiada to rozkładowi Boltzmanna kwadratów prędkości, czyli energii kinetycznej E. Wtedy liczba cząstek ΔN o energii zawartej w przedziale ΔE wokół wartości E jest proporcjonalna przede wszystkim do $e^{-E/kT}$; inne czynniki zależne od E pomijamy tu jako znacznie wolniej zmienne wraz z E od czynnika wykładniczego. Największy wkład do liczby reakcji będą dawały zderzenia o tej energii, dla której iloczyn prawdopodobieństwa tunelowania i liczby cząstek $R \sim e^{-\sqrt{E_G/E} - E/kT}$ jest największy. Należy więc znaleźć maksimum wyrażenia w wykładniku poprzez szukanie miejsca, gdzie pochodna wykładnika się zeruje: $\mathrm{d}\ln R/\mathrm{d}E = 0$. Maksymalna wartość osiągana jest przy energii $W \approx (kT)^{2/3} E_G^{1/3}$. O ile cząstki o energii kT nie mają szans na pokonanie bariery, a cząstek o energii V praktycznie nie ma, to przy pośredniej energii W zarówno prawdopodobieństwo tunelowania, jak i liczba zderzeń są znaczące. Niestety, maksymalna wartość R jest nadal bardzo mała: $R_{\max} \approx e^{-20}$. Tak duża bezwzględna wartość wykładnika ma poważne konsekwencje. Po pierwsze, niewielki, powiedzmy jednoprocentowy, wzrost temperatury spowoduje zmianę wykładnika też mniej więcej o 1%, czyli o 0,2, czemu odpowiada wzrost R i liczby reakcji o $e^{0{,}2}$, czyli o około 20%. Oznacza to, że liczba reakcji jest bardzo czuła na zmiany temperatury, mianowicie zależy od niej jak T^{20}. Po drugie, E_G zależy od kwadratu ładunku, jeśli więc ładunek zderzających się cząstek będzie większy, to reakcji z udziałem tych cząstek będzie zachodzić znacznie mniej, bo wykładnik będzie duży. Po trzecie, choć w całej masie Słońca reakcji zachodzi dużo, to w małej masie w laboratorium reakcje będą tak niezwykle rzadkie, że ich pomiar jest niemożliwy.

W normalnym gazie, takim jak w Słońcu, elektrony trzymają się z dala od jąder atomowych. Istnieją jednak gwiazdy, w których wnętrzach materia jest tak ściśnięta, że elektrony chcąc nie chcąc muszą przebywać tak blisko reagujących jąder, że ich oddziaływanie należy uwzględnić. Obecność ujemnych elektronów w pobliżu dodatnich jąder neutralizuje nieco ich odpychanie elektrostatyczne, ułatwiając tunelowanie. Ten efekt, zwany ekranowaniem, prowadzi do przyspieszenia reakcji w gwiazdach o dużych gęstościach w centrum.

Zakończenie

Przeniknięcie przez barierę potencjału umożliwia zajście reakcji, ale wcale jeszcze tego nie gwarantuje. Istotne są tu jeszcze siły oddziaływań wewnątrzjądrowych. To już jest temat na inną okazję, natomiast z powyższych rozważań wynika dobitnie, że każdy z docierających do nas promieni słonecznych został wyprodukowany dzięki naruszeniu klasycznej zasady zachowania energii o czynnik – bagatelka – 20 razy. Oznacza to nie tyle, że zasadę zachowania energii należy wyrzucić na śmietnik, ale że w opisującej cząstki fizyce kwantowej zasadzie tej podlegają – powtarzamy – jedynie wartości średnie (a nie chwilowe) energii.