O kolejkach

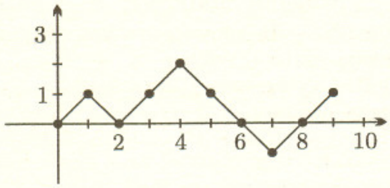
Włodzimierz BIELIŃSKI, Krzysztof PAROL

W artykule zajmiemy się następującym zadaniem:
Przed kasą kina stoi $(p+d)$-osobowa kolejka, przy czym p osób ma monety pięciozłotowe, natomiast d osób ma banknoty dziesięciozłotowe. Bilety kosztują pięć złotych. Przed rozpoczęciem sprzedaży w kasie nie ma pieniędzy. Na ile sposobów można ustawić kolejkę, aby sprzedaż nie uległa zahamowaniu, tzn. aby żadna osoba nie musiała czekać na resztę?

Z każdą kolejką można (jednoznacznie) powiązać wykres w kształcie łamanej przedstawiający zmiany liczby pięciozłotówek w kasie podczas obsługiwania kolejki. Kolejka jest zła wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej wykres ma fragmenty leżące poniżej osi OX.

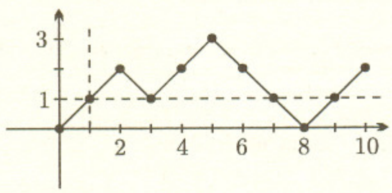
W naszym rozwiązaniu będziemy zakładać, że osoby są nierozróżnialne. Aby otrzymać wynik w przypadku osób rozróżnialnych, należy naszą odpowiedź pomnożyć przez $p!d!$.

Powiemy, że kolejka jest typu (p,d), jeśli jest długości $p+d$ oraz p osób ma pięciozłotówki, a pozostałe osoby mają dziesięciozłotówki. Kolejkę nazwiemy *dobrą*, jeśli sprzedaż biletów nie ulegnie zahamowaniu, w przeciwnym przypadku kolejkę nazwiemy złą. Oznaczmy szukaną liczbę przez $K(p,d)$. Oczywiście, $K(p,d)=0$ dla $p<d$. Możemy więc założyć, że $p \geq d$. Liczbę $K(p,d)$ znajdziemy odejmując od wszystkich ustawień $p+d$ osób ustawienia złe, tzn. takie, dla których kolejka utknie. Łatwo zauważyć, że liczba wszystkich kolejek jest równa $\binom{p+d}{p}$ (spośród wszystkich $p+d$ miejsc wybieramy p i na nich ustawiamy posiadaczy pięciozłotówek).



Rys. 1. Zła kolejka typu (5,4). Siódmemu klientowi kasjer nie może wydać reszty ($s=7$).

Wykażemy, że liczba złych kolejek typu (p,d) jest równa $\binom{p+d}{p+1}$. Niech s oznacza numer osoby, na której zatrzyma się kolejka. Łatwo zauważyć, że s musi być liczbą nieparzystą, gdyż wcześniej do kasy musiało trafić tyle pięciozłotówek, co dziesięciozłotówek. Dodajmy na początek takiej kolejki osobę z pięciozłotówką, tworząc nową kolejkę typu $(p+1,d)$. Mamy teraz w kolejce na pierwszych $s+1$ miejscach tyle samo osób z monetami 5 zł i banknotami 10 zł. Dokonajmy operacji drastycznej z punktu widzenia posiadaczy dziesięciozłotówek. Na pierwszych $s+1$ miejscach nowej kolejki zamieńmy wszystkim nominały posiadanych pieniędzy (kto miał x zł, po zmianie ma $15-x$ zł). Łatwo zauważyć, że ta operacja nie zmieni typu kolejki.
Po „wymianie pieniędzy" na pierwszym miejscu naszej kolejki typu $(p+1,d)$ stoi osoba z banknotem dziesięciozłotowym.



Rys. 2. Kolejka z rysunku 1 po dodaniu na początku osoby z pięciozłotówką. Na pierwszych $s+1=8$ miejscach połowa osób ma dziesięciozłotówki.

Opisane wyżej przekształcenie złej kolejki typu (p,d) na kolejkę typu $(p+1,d)$ zaczynającą się od osoby z dziesięciozłotówką jest, oczywiście, bijekcją. Zatem, liczba złych kolejek typu (p,d) jest równa liczbie takich kolejek typu $(p+1,d)$, które zaczynają się od osoby z dziesięciozłotówką. Łatwo zauważyć, że powyższych kolejek jest $\binom{(p+1)+(d-1)}{p+1}$, gdyż na pierwszym miejscu stoi osoba z dziesięciozłotówką, a $p+1$ osób z pięciozłotówkami możemy w dowolny sposób ustawić na pozostałych $p+d$ miejscach. Ostatecznie otrzymujemy

Kto nie wierzy, że opisane przekształcenie jest bijekcją, niech obejrzy w skupieniu rysunki 1, 2 i 3.

$$K(p,d)=\binom{p+d}{p}-\binom{p+d}{p+1}=\frac{(p+d)!}{p!d!}-\frac{(p+d)!}{(p+1)!(d-1)!}=$$
$$=\frac{(p+d)!}{p!d!}-\frac{(p+d)!}{p!d!}\cdot\frac{d}{p+1}=\frac{p-d+1}{p+1}\cdot\binom{p+d}{p}.$$

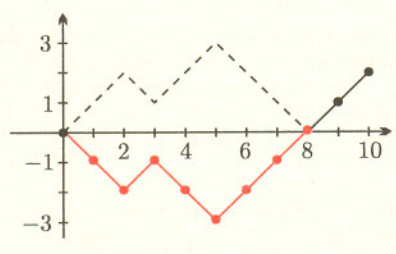
Podamy teraz kilka własności liczb $K(p,d)$.

1. $K(n,0)=1$.

2. $K(n,1)=n$. Osoba z dziesięciozłotówką nie może stać na początku kolejki; mamy dla niej do dyspozycji $(n+1)-1=n$ miejsc.

3. $K(n,n)=K(n,n-1)$. Łatwo zauważyć, że w dobrej kolejce typu (n,n) na końcu musi stać osoba z banknotem dziesięciozłotowym.

4. $K(p,d)=K(p,d-1)+K(p-1,d)$, gdy $p \geq d > 0$. Rozpatrzymy dwa przypadki.



Rys. 3. Kolejka z rysunku 2 po „wymianie nominałów" u pierwszych ośmiu osób.

(a) $p = d$. Nie istnieją wtedy dobre kolejki typu $(p-1, d)$, czyli $K(p-1, d) = 0$. Zatem, teza wynika z punktu 3.

(b) $p > d$. Czytelnik zechce zauważyć, że w tym przypadku operacja wyrzucania z kolejki ostatniej osoby jest bijekcją pomiędzy zbiorem dobrych kolejek typu (p, d) a sumą zbiorów dobrych kolejek typu $(p-1, d)$ i dobrych kolejek typu $(p, d-1)$. Jest to, oczywiście, operacja różnowartościowa. Operacją odwrotną jest dodanie odpowiedniej osoby na końcu kolejki:

- do dobrej kolejki typu $(p-1, d)$ dostawiamy osobę z pięciozłotówką (oczywiście, otrzymamy dobrą kolejkę typu (p, d));
- do dobrej kolejki typu $(p, d-1)$ dodajemy osobę z dziesięciozłotówką (i w tym przypadku dostaniemy dobrą kolejkę typu (p, d), gdyż $d < p$ i po obsłużeniu całej kolejki typu $(p, d-1)$ w kasie zostanie przynajmniej jedna pięciozłotówka).

Z powyższych spostrzeżeń mamy $K(p, d) = K(p, d-1) + K(p-1, d)$.

5. $K(p, d) = \sum_{i=0}^{d} K(p-1, i)$ dla $p > 0$ i $0 \leq d \leq p$.
Dowód prowadzimy przez indukcję względem d (przy ustalonym p).
Dla $d = 0$ mamy $K(p, 0) = 1 = K(p-1, 0)$. Niech $d \geq 1$. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich liczb naturalnych mniejszych od d. Na podstawie punktu 4 mamy

$$K(p,d)=K(p,d-1)+K(p-1,d)=\sum_{i=0}^{d-1} K(p-1,i)+K(p-1,d)=\sum_{i=0}^{d} K(p-1,i)\,.$$

6. $K(p, d) = \sum_{i=d}^{p} K(i, d-1)$. Dowód przez indukcję względem p przy ustalonym d przebiega podobnie jak poprzedni.

7. $K(p, d) = \sum_{k=0}^{d} K(d, k)\binom{p-k-1}{d-k}$. Ustawmy najpierw w kolejkę osoby z pięciozłotówkami. Podzielmy teraz te osoby na dwie części: od pozycji 1 do d i od pozycji $d+1$ do p. Następnie, dostawiamy do kolejki d osób z dziesięciozłotówkami. Do pierwszej części kolejki możemy wstawić k osób ($k \leq d$), w taki sposób, by powstała dobra kolejka typu (d, k). Można to zrobić na $K(d, k)$ sposobów. Pozostałe $d-k$ osób możemy wstawić w dowolny sposób do drugiej części kolejki. Da się to zrobić na $\binom{(p-d)+(d-k)-1}{d-k}$ sposobów, gdyż mamy do dyspozycji $p-d$ miejsc, na których trzeba umieścić $d-k$ osób z dziesięciozłotówkami, przy czym na jednym miejscu możemy ustawić więcej niż jedną osobę. Są to więc kombinacje z powtórzeniami (liczba j-elementowych kombinacji z powtórzeniami wybieranych ze zbioru n-elementowego jest równa $\binom{n+j-1}{j}$). Otrzymujemy więc

$$K(p,d)=\sum_{k=0}^{d} K(d,k)\binom{(p-d)+(d-k)-1}{d-k}=\sum_{k=0}^{d} K(d,k)\binom{p-k-1}{d-k}\,.$$

8. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i K(2n-i, i) = 0$. Dowód tego wzoru polega na nietrudnych przekształceniach (z wykorzystaniem własności 4); Czytelnik zechce go przeprowadzić samodzielnie.

9. Liczba $K(n, n)$ jest równa tzw. $(n+1)$-szej liczbie Catalana. Jak to wykazać i co to są liczby Catalana, opowiemy Czytelnikom *Delty* przy innej okazji.

Na zakończenie proponujemy Czytelnikom samodzielne rozwiązanie (z wykorzystaniem liczb $K(p, d)$) następującego zadania:
Na ile sposobów można ustawić w dwuszeregu $2n$-osobową drużynę harcerską, aby w każdym szeregu harcerze byli ustawieni według wzrostu oraz aby za każdym harcerzem z pierwszego szeregu stał harcerz od niego wyższy? (W tym zadaniu zakładamy, że harcerze są rozróżnialni.)