Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1996

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z matematyki nr 307, 308

Redaguje Marcin E. KUCZMA

307. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność
$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4).$$
Dowieść, że są one długościami boków pewnego trójkąta.

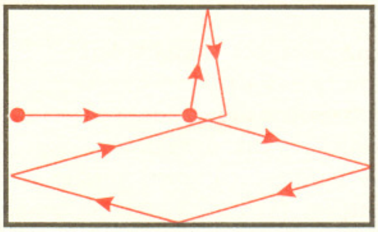
308. Dane są funkcje $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o następujących własnościach: f jest funkcją różniczkowalną, $f'(x) = g(f(x))$ dla $x \in \mathbf{R}$. Czy funkcja f musi być monotoniczna (niemalejąca lub nierosnąca)?

Zadanie **308** zaproponował pan Przemysław Gadziński ze Środy Śląskiej.

Zadania z fizyki nr 205, 206

Redaguje Jerzy B. BROJAN

205. Małe naładowane ciało krąży po okręgu o promieniu r_0 w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0. Jeśli pole magnetyczne nie zmieniając kierunku bardzo powoli wzrośnie lub zmaleje do wartości B_1, to ciało nadal będzie krążyć po okręgu. Znaleźć wzór na promień r_1 nowego okręgu.
Wskazówka: Nie pomijać efektów wirowego pola elektrycznego (powstającego wskutek zmian B).



206. Na prostokątnym stole bilardowym o wymiarach $a \times b$ ($a = 1$ m, $b = 2$ m) znajdują się dwie jednakowe bile o średnicy $d = 6$ cm – jedna na środku stołu, a druga przy środku krótszego boku. Chcemy tak uderzyć w drugą bilę, aby trafiła ona w środkową, dalej jedna z bil odbiła się od dłuższego boku stołu, a druga kolejno od krótszego, dłuższego i znów krótszego, po czym zderzyły się ponownie (rys.) Ocenić niezbędną do tego dokładność kierunku uderzenia początkowego (w stopniach).

Zadania

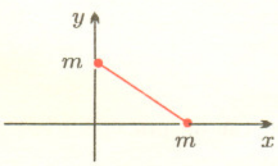
Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 750. Niech liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ należą do zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Wykonujemy następujący eksperyment losowy: rzucamy dziesięć razy kostką sześcienną i sumujemy wyniki rzutów, jednakże jeśli w n-tym rzucie wypadnie a_n oczek, to nie bierzemy pod uwagę żadnego z następujących po nim rzutów (przyjmujemy, że ich wyniki są zerowe). Jak dobrać liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, by wartość oczekiwana sumy otrzymywanej w naszym eksperymencie była największa?
Rozwiązanie na str. 6

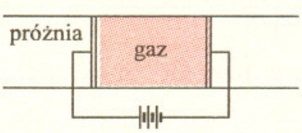
M 751. Na nieskończonej czarno-białej szachownicy tak kładziemy prostokąt, że dokładnie połowa nakrytej nim powierzchni jest biała; żądamy przy tym, by prosta zawierająca jeden z boków prostokąta przecinała krawędzie pól szachownicy pod ustalonym z góry kątem. Czy jest to możliwe niezależnie od wymiarów prostokąta?
Rozwiązanie na str. 6

M 752. Udowodnić, że liczba $S = \sum_{n=1}^{1995} n^{n^n}$ nie jest sześcianem żadnej liczby naturalnej.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Krzysztof REJMER



F 413. Dwa punkty materialne o masie m każdy poruszają się bez tarcia: jeden wzdłuż osi x, drugi wzdłuż osi y kartezjańskiego układu współrzędnych. Punkty połączono sztywnym nieważkim prętem o długości A. Wykazać, że ruch obu punktów jest ruchem harmonicznym i znaleźć częstotliwość drgań punktów.
Autorem tego problemu jest Jorge B. Sztrajman (Universidad de Buenos Aires).
Rozwiązanie na str. 7



F 414. Pomiędzy ruchomymi okładkami kondensatora płaskiego znajduje się gaz doskonały. Okładki połączone są ze źródłem o stałym napięciu U. Znaleźć równanie przemiany, jakiej podlega ten gaz podczas ogrzewania oraz ciepło molowe tej przemiany. Efekty brzegowe zaniedbujemy.
Rozwiązanie na str. 7