# Konsekwencje prostej uwagi i dwumianu Newtona

*Józef BANAŚ*

W wielu sytuacjach zdarza się, że prosta, a nawet trywialna obserwacja pociąga za sobą daleko idące konsekwencje, umożliwiając znaczne uproszczenie dowodów i skomplikowanych rozumowań.

Niżej chciałbym przedstawić przykład ilustrujący wypowiedziany pogląd.

Otóż, w matematyce bardzo ważne są różnego typu równości i tożsamości pozwalające wyrazić skomplikowane wyrażenia przez wyrażenia znacznie prostsze. Przykładami takich równości mogą być wypisane niżej wzory zaczerpnięte ze znakomitego zbioru zadań [1].

1. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b$ oraz dla dowolnego naturalnego $n$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = na(a+b)^{n-1}.$$

2. Dla dowolnej liczby naturalnej $n$ jest

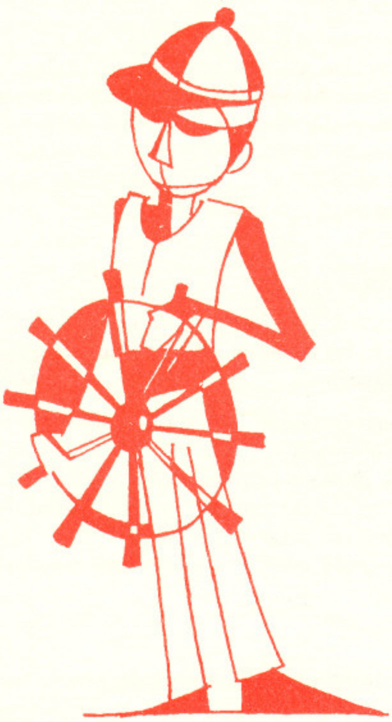
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}.$$

3. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b$ oraz dla dowolnego naturalnego $n > 1$ zachodzi równość

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) a^k b^{n-k} = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}.$$

4. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ jest

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2}.$$



Autorzy książki [1] przeprowadzają dowody powyższych równości kilkoma sposobami. I tak np. dowody przeprowadzone metodą indukcji matematycznej są bardzo długie i zawiłe rachunkowo. Można też, co zrobiono w [1], użyć metod rachunku różniczkowego do dowodów równości 1 i 3, natomiast równości 2 i 4 wywnioskować jako szczególne przypadki 1 i 3 dla $a = b = 1$. Sposób ten, choć krótki, nie jest jednak naturalny, ponieważ w sytuacji, gdybyśmy chcieli „wystartować" np. tylko od równości 2, bardzo trudno byłoby domyślić się, że jest to szczególny przypadek jakiejś ogólniejszej tożsamości, której dowód jest prosty.

Okazuje się, że dowody wszystkich wypisanych wyżej równości można przeprowadzić bardzo prosto i naturalnie wychodząc od łatwego do wykazania wzoru

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \tag{1}$$

słusznego dla wszystkich takich liczb naturalnych $n, k$, że $k \leq n$. Potrzebny nam będzie również dobrze znany z nauki szkolnej **wzór dwumianowy Newtona**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \tag{2}$$

który jest prawdziwy dla dowolnych rzeczywistych $a, b$ oraz dowolnego całkowitego, nieujemnego $n$. Warto również przypomnieć dwa interesujące i użyteczne przypadki szczególne wzoru (2). Otóż, kładąc w nim kolejno $a = b = 1$ oraz $a = -1$, $b = 1$, otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \tag{3}$$

(4) $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0\,.$$

Przejdźmy teraz do zapowiedzianych wcześniej dowodów. Otóż, żeby udowodnić równość (1), skorzystajmy ze wzoru (1) i trochę porachujmy:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}ka^kb^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}ka^kb^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}aa^{k-1}b^{(n-1)-(k-1)}=na\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a^{k-1}b^{(n-1)-(k-1)}=$$

$$=na\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}a^pb^{(n-1)-p}\,.$$

Korzystając teraz ze wzoru (2) (gdzie $n$ zastępujemy przez $n-1$) otrzymujemy równość 1.

Żeby udowodnić równość 2 (bez odwoływania się do równości 1) postępujemy zupełnie analogicznie: korzystamy z równości (1) i ze wzoru (3). Mamy:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}k=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=$$

$$=n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}=n2^{n-1}\,.$$

Zauważmy dalej, że tą samą metodą „pójdzie" dowód równości 3. Wystarczy nadal posługiwać się tylko trywialnym wzorem (1) (dwukrotnie) i dwumianem Newtona (2). W szczegółach wygląda to następująco:

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)a^kb^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}k(k-1)a^kb^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}n\binom{n-1}{k-1}(k-1)aa^{k-1}b^{(n-1)-(k-1)}=$$

$$=na\sum_{p=1}^{n-1}p\binom{n-1}{p}a^pb^{(n-1)-p}=na\sum_{p=1}^{n-1}p\frac{n-1}{p}\binom{n-2}{p-1}aa^{p-1}b^{(n-2)-(p-1)}=$$

$$=n(n-1)a^2\sum_{q=0}^{n-2}\binom{n-2}{q}a^qb^{(n-2)-q}=n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}\,.$$

Czytelnik bez trudu udowodni już teraz równość 4, nawet jeżeli nie zauważy, że jest to szczególny przypadek równości 3.

Proponujemy również Czytelnikowi przeprowadzić dowody wypisanych poniżej równości. Wszędzie radzimy korzystać z prostej uwagi wyrażonej wzorem (1) oraz ze wzorów (2), (3) i (4).

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\,,\qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k=0\,,$$

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k(k-1)=0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2a^kb^{n-k}=nb(a+nb)(a+b)^{n-2}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n+1)2^{n-2}\,,\qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^2=0\,.$$

**Literatura**

[1] L. Jeśmanowicz i J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1975.