

- Działanie $*$ w zbiorze G jest odpowiednie, jeśli
- 1° jest łączne: $(x * y) * z = x * (y * z)$,
 - 2° w G jest element neutralny e :
 $x * e = e * x = x$,
 - 3° dla każdego $x \in G$ istnieje w G taki x^{-1} , że $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Na przykład, dla $G = \{e, a\}$ poniższa tabela opisuje (jedyną) grupę dwuelementową Z_2 :

\cdot	e	a
e	e	a
a	a	e

W grupie Z_2 generator a spełnia relacje $a \cdot a = a^2 = e, a^4 = e, a^6 = e, \dots$. Zauważmy, że tylko pierwsza z tych relacji jest istotna w tym sensie, że pociąga za sobą wszystkie następne.

Prezentacje zapisujemy w formie $G = \langle x_1, x_2, \dots \mid r_1 = e, r_2 = e, \dots \rangle$. Litery x_i oznaczają tu generatory, a r_j są pewnymi iloczynami generatorów, czyli słowami napisanymi za pomocą liter x_i oraz x_i^{-1} . Tak więc np. $Z_2 = \langle x \mid x^2 = e \rangle, Z = \langle x \mid \emptyset \rangle$.

Tym, którzy chcą poczuć smak tej przygody, proponujemy ćwiczenie: należy wykazać, że $\langle x, y, z \mid x^2 y x^{-1} y^{-1} = e, y^2 z y^{-1} z^{-1} = e, z^2 x z^{-1} x^{-1} = e \rangle$ jest prezentacją grupy trywialnej $G = \{e\}$, tj. równości $x = e, y = e, z = e$ są konsekwencją wypisanych wyżej relacji.

Grupa to zbiór wyposażony w odpowiednie działanie (na ogół zwane mnożeniem). Zbiory liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych, liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ z działaniem dodawania są wszystkie grupami. Grupą jest też zbiór liczb rzeczywistych dodatnich z działaniem mnożenia. Inne przykłady to zbiory przekształceń z działaniem ich składania; np. permutacje, izometrie, symetrie własne jakiejś figury.

Aby opisać grupę, należy podać zbiór G wraz z przepisem na mnożenie jego elementów. Kiedy zbiór G jest skończony, to jego elementy możemy wypisać jeden po drugim, a mnożenie określić po prostu za pomocą kwadratowej tabelki. Sposób taki, oczywiście, odpada, gdy grupa jest nieskończona. Także dla dużych grup skończonych używanie tabelki jest mało praktyczne. Musimy więc szukać innych sposobów.

Zauważmy, że nawet bardzo duża grupa może być „zbudowana” z niewielkiego, skończonego podzbioru $S \subset G$. Na przykład, każdą liczbę całkowitą można otrzymać przez wielokrotne sumowanie liczby 1 lub liczby przeciwnej: -1 . Mówimy, że zbiór $S = \{1\}$ generuje grupę liczb całkowitych \mathbb{Z} . Ogólnie, podzbiór $S \subset G$ generuje grupę G , jeśli każdy jej element można otrzymać przez wielokrotne mnożenie bądź odwracanie elementów zbioru S . Możemy więc opisywać grupę przez wskazanie zbioru jej generatorów. Niestety, to nie wystarczy. Na przykład, zarówno grupa \mathbb{Z} , jak i Z_2 jest generowana przez jeden element. Czego brakuje?

Otóż, pewne iloczyny generatorów (i ich odwrotności) reprezentują element neutralny $e \in G$. Brakująca informacja to opis takich iloczynów. Nie wypisujemy wszystkich – staramy się znaleźć taki (mały) zbiór relacji $\{r_1 = e, r_2 = e, \dots\}$, którego konsekwencją są wszystkie reprezentacje jedynki grupy. Generatory i relacje dają tzw. *prezentację* grupy.

Można postąpić na odwrót i zacząć od prezentacji. Każdy napis podanej wyżej postaci reprezentuje pewną grupę. Niestety, kompletnie różne napisy mogą opisywać tę samą grupę. Co więcej, problem *czy dane dwie prezentacje dają tę samą grupę?* jest nierozstrzygalny.

Życie normalnej gwiazdy

Zaczyna się od obłoku materii. Jeśli jest on odpowiednio duży ($10^2 - 10^5$ mas Słońca), to powstaną w nim zęstki, które dadzą początek gwiazdom – w przeciwnym razie energia termiczna obłok rozproszy.

Na ogół w obłoku rodzi się równocześnie tysiące gwiazd. Najmniejsze (poniżej 0,1 masy Słońca) nie zapalą nigdy w swym wnętrzu atomowego ognia i będą, jako brązowe karły, świecić swą energią grawitacyjną. Te większe będą świeciły dzięki reakcjom termojądrowym. Ten etap ich życia będzie trwał tym krócej, im będą masywniejsze – mają co prawda więcej paliwa, jednak zużywają je gwałtowniej. Słońce, jako mało masywne, żyje już około 5 mld lat i pożyje jeszcze drugie tyle.

Potem dzieją się straszne rzeczy – gwiazda może skokowo zmieniać swoją jasność wskutek uruchamiania nowych źródeł energii (np. przemiany helu w węgiel, potem tlen, neon, magnez, krzem, w końcu żelazo), może przeżyć okres regularnych zmian jasności (cefeidy), może odrzucić warstwę powierzchniową (tak powstaje mgławica planetarna, a w jej centrum zostaje biały karzeł). Wreszcie – gdy ma dostatecznie dużą masę – może eksplodować jako supernowa, a pozostałością po niej stanie się gwiazda neutronowa lub czarna dziura. Ostatnie chwile bardzo masywnych gwiazd to zaiste kosmiczny kataklizm: przez pewien czas supernowa świeci z mocą równą łącznej mocy wszystkich gwiazd galaktyki sygnalizując w ten sposób o swej zagładzie z kosmicznych odległości.

A jako produkt uboczny wszystkie te wydarzenia są źródłem kompletu pierwiastków, dzięki którym np. nasza planeta może prezentować się tak efektownie.

Jądro atomu

To, że atom ma jądro, stwierdził w 1913 roku Rutherford rozpraszając cząstki alfa na metalowej folii. Analiza kątów rozproszenia wykazała, że cząstki alfa odbijają się od bardzo małych (10^{-15} m), sto tysięcy razy mniejszych od rozmiaru atomu kulek. Te hipotetyczne kulki zostały nazwane *jądrem atomowym*. Zaskoczenie było duże, gdyż powszechnie uważano, iż atom zbudowany jest jak ciasto z rodzynkami (model Thomsona) – rodzynki-elektrony tkwią wewnątrz czegoś o dodatnim ładunku elektrycznym.

Dzisiaj wiemy, że model Rutherforda nie ma wiele wspólnego z rzeczywistością. Model, w którym kulki-cząstki alfa odbijają się od kulek-jąder atomowych, daje wyniki zgodne ze stanem faktycznym tylko przypadkowo. Jednak jego powstanie pozwoliło potem zbudować właściwy już model jądra środkami mechaniki kwantowej.

Jądro atomowe nie jest tworem prostym – składa się z dwóch rodzajów cząstek: dodatnich protonów i elektrycznie obojętnych neutronów związanych bardzo silnymi, choć krótkozasięgowymi siłami jądrowymi, o których mówi się *oddziaływania silne*. W szczególności są one silniejsze od odpychania elektrostatycznego protonów. Nie są jednak tak silne, by w niektórych przypadkach jądra nie rozpadały się tworząc jądra innych pierwiastków (promieniotwórczość).

Rozszczepienie jąder ciężkich pierwiastków, jak też synteza jąder lekkich jest najwydajniejszym ze znanych obecnie sposobów pozyskania energii. Na Ziemi wykorzystuje się ją w reaktorach lub bombach, w Kosmosie jest ona źródłem świecenia gwiazd.