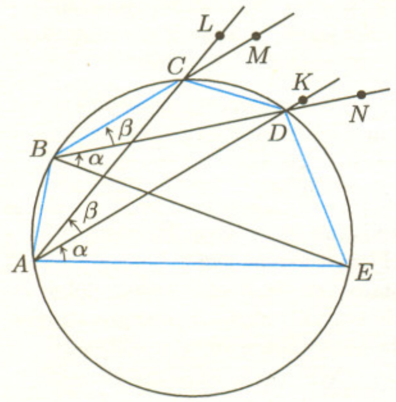
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1995

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 291 (WT=1,59) i 292 (WT=2,76)
z numeru 12/1994

Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,33
Janusz Olszewski	– Suwałki	40,79
Adam Czornik	– Bytom	39,26
Tomasz Kulpa	– Katowice	33,34
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	32,66



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z matematyki nr 305, 306

Redaguje Marcin E. KUCZMA

305. Wysokość CD trójkąta ostrokątnego ABC ma długość h; punkty O oraz I są środkami okręgów opisanego (o promieniu R) oraz wpisanego (o promieniu r). Punkt P, leżący na odcinku CD, ma tę własność, że prosta wyznaczona przez jego rzuty na boki AC i BC przechodzi przez punkty O oraz I.
(a) Znaleźć związek między liczbami R, r, h.
(b) Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość stosunku $|CP| : h$.

306. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Dla $k = 1, 2, \ldots, p-1$ oznaczmy przez r_k resztę z dzielenia liczby k^p przez p^2. Obliczyć sumę $r_1 + r_2 + \ldots + r_{p-1}$.

Zadanie **306** zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1995

Przypominamy treść zadań:

301. Wielomian $P(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1}$ jest podzielny przez wielomian $Q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, przy czym $c_{n+1} = a_n \neq 0$. Dowieść, że

$$\max(|a_0|, \ldots, |a_n|) \le (n+1)\max(|c_0|, \ldots, |c_{n+1}|).$$

302. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Na półprostych $AD^{\rightarrow}$, $AC^{\rightarrow}$, $BC^{\rightarrow}$, $BD^{\rightarrow}$ odkładamy odpowiednio odcinki AK, AL, BM, BN o długościach $|AK| = |AE|$, $|AL| = |AD|$, $|BM| = |BD|$, $|BN| = |BE|$. Udowodnić, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy $|CD| = |DE|$.

301. Z warunków zadania wynika, że

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

dla pewnej liczby rzeczywistej α. Przyrównując współczynniki wielomianów po obu stronach tej równości dostajemy układ równań

$$\begin{aligned} c_0 &= -\alpha a_0 \\ c_1 &= a_0 - \alpha a_1 \\ c_2 &= a_1 - \alpha a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n-1} &= a_{n-2} - \alpha a_{n-1} \\ c_n &= a_{n-1} - \alpha a_n \\ c_{n+1} &= a_n . \end{aligned}$$

Począwszy od ostatniego równania, wyznaczamy kolejno:
$a_n = c_{n+1}$, $a_{n-1} = c_n + \alpha c_{n+1}$, $a_{n-2} = c_{n-1} + \alpha c_n + \alpha^2 c_{n+1}$,
i ogólnie

$$(1) \qquad a_k = \sum_{i=0}^{n-k} \alpha^i c_{k+1+i} \qquad (\text{dla} \quad k = 1, \ldots, n).$$

Jeśli $\alpha \neq 0$, możemy powyższy układ rozwiązywać począwszy od pierwszego równania:
$a_0 = -\alpha^{-1}c_0$, $a_1 = -\alpha^{-2}c_0 - \alpha^{-1}c_1$, $a_2 = -\alpha^{-3}c_0 - \alpha^{-2}c_1 - \alpha^{-1}c_2$,
i ogólnie

$$(2) \qquad a_k = -\sum_{i=0}^{k} \alpha^{-(k+1-i)} c_i \qquad (\text{dla} \quad k = 1, \ldots, n).$$

Dane do udowodnienia oszacowanie uzyskujemy natychmiast z równości (1), gdy $|\alpha| \le 1$, oraz z równości (2), gdy $|\alpha| \ge 1$.

302. Pięciokąt jest wpisany w okrąg, więc mamy następujące równości kątów zorientowanych:

$$\angle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \angle(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) =: \alpha,$$
$$\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) =: \beta.$$

W przestrzeni wektorów swobodnych rozważamy przekształcenia (liniowe):

$$f = \text{obrót o kąt } \alpha, \qquad g = \text{obrót o kąt } \beta.$$

Z określenia punktów K, L, M, N wynika, że

$$\overrightarrow{AK} = f(\overrightarrow{AE}),\ \overrightarrow{AL} = g(\overrightarrow{AD}),\ \overrightarrow{BM} = f(\overrightarrow{BD}),\ \overrightarrow{BN} = g(\overrightarrow{BE}).$$

Ponadto mamy równość

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE};$$

oznaczmy ten wektor przez $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE};$$

jest to wektor niezerowy. Z wypisanych zależności otrzymujemy związki:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = g(\overrightarrow{AD}) - f(\overrightarrow{AE}),$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = g(\overrightarrow{BE}) - f(\overrightarrow{BD}),$$
$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = g(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}) - f(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) = g(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}).$$

Następujące stwierdzenia są wobec tego kolejno równoważne:

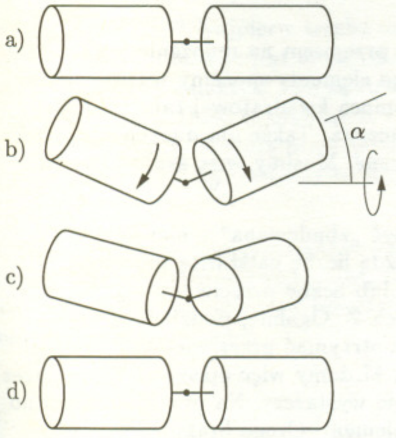
[$KLMN$ jest równoległobokiem] $\iff$
$\iff$ [$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN}$ jest wektorem zerowym] $\iff$ [$g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$] $\iff$
$\iff$ [obrót wektora $\mathbf{v}$ o kąt α oraz o kąt β daje w wyniku ten sam wektor] $\iff$
$\iff$ [$\alpha = \beta$] $\iff$ [$\angle EAD = \angle DAC$] $\iff$ [$|ED| = |DC|$].

Zadania z fizyki nr 203, 204

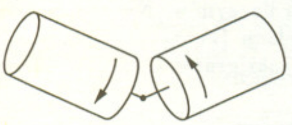
Redaguje Jerzy B. BROJAN

203. „Kot spada zawsze na cztery łapy" – mówi przysłowie. Jeden z modeli objaśniających mechanizm obrotu kota w powietrzu jest następujący: Przedstawmy ciało kota w postaci dwóch jednorodnych i jednakowych walców o promieniu r i wysokości h osadzonych na nieważkich ośkach połączonych przegubowo (rys. 1). Przyjmijmy, że początkowo układ walców był nieruchomy, dalej nastąpiło zgięcie w przegubie o kąt 2α, następnie walce obróciły się o jednakowy kąt β wokół swych osi (względem układu nieinercjalnego), cały zaś układ obrócił się o kąt γ względem osi poziomej, a po zakończeniu obrotu ośki się wyprostowały. O jaki kąt obróciły się walce względem układu inercjalnego? Pominąć oddziaływanie z powietrzem („kot swobodnie lewitujący"). Pytanie dodatkowe: o jaki kąt i w jakiej płaszczyźnie obróciłby się układ walców, gdyby obrót o kąt β nastąpił z przeciwnym zwrotem (rys. 2)?

204. Ocenić orientacyjnie maksymalny ładunek, jakim można naładować kulkę stalową o średnicy 2 cm, aby nie uległa ona rozerwaniu pod wpływem odpychania elektrostatycznego (ewentualnie także – aby nie oderwała się od niej warstwa powierzchniowa).



Rys. 1



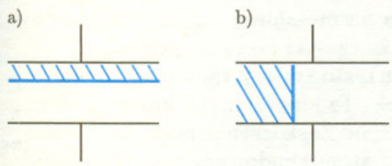
Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1995

Przypominamy treść zadań:

199. Między okładki płaskiego kondensatora powietrznego wpuszczono ciecz dielektryczną w ilości niewystarczającej do wypełnienia przestrzeni między okładkami. Jeśli kondensator naładujemy, to czy ciecz utworzy warstwę równoległą do okładek (rys. 3a), czy też zajmie część powierzchni okładek (rys. 3b)? Należy pominąć efekty brzegowe, tzn. przyjąć, że rozmiary okładek są znacznie większe od ich wzajemnej odległości, a ponadto pominąć efekty siły ciężkości oraz napięcia powierzchniowego.

200. Ciało o masie m porusza się po linii prostej pod wpływem siły wywieranej przez nieważką sprężynę o stałej sprężystości k. Punkt zamocowania drugiego końca sprężyny tak się obluzował, że sprężyna drgając porusza nim; jego prędkość jest proporcjonalna do siły, a stała proporcjonalności α jest dana. Zakładając, że α jest małe (obluzowanie jest niewielkie) obliczyć, po jakim czasie amplituda drgań ciała zmaleje 2 razy w stosunku do amplitudy początkowej.



Rys. 3

199. Niech S będzie powierzchnią okładek, d ich odległością, a ε stałą dielektryczną cieczy. Wprowadźmy też oznaczenia grubości warstw cieczy d_1 i powietrza d_2 na rysunku 3a, a S_1 i S_2 będą odpowiednimi powierzchniami na rysunku 3b. Kondensator przedstawiony na rysunku 3a można uznać za szeregowe połączenie kondensatorów powietrznego i cieczowego, zatem jego pojemność jest dana wzorem

$$C_a = \frac{\varepsilon_0 S}{(d_1/\varepsilon) + d_2},$$

a na rysunku 3b połączenie jest równoległe, więc

$$C_b = \frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon S_1 + S_2).$$

Uwzględniając równości $d = d_1 + d_2$, $S = S_1 + S_2$ oraz $S_1/S_2 = d_1/d_2$ (objętość cieczy jest taka sama) nietrudno wykazać, że $C_a < C_b$. Ciecz ułoży się tak, aby energia naładowanego kondensatora była jak najmniejsza. Tę energię należy wyznaczać ze wzoru $E = Q^2/(2C)$ (a nie ze wzoru $E = CU^2/2$, gdyż wtedy w bilansie energii trzeba by było uwzględnić też źródło napięcia). Prawidłowe położenie cieczy jest więc przedstawione na rysunku 3b.

200. Oznaczmy przesunięcie ciała przez x, a przesunięcie drugiego końca sprężyny przez y. Siła napięcia sprężyny jest równa $k(y-x)$, a ruchem obu końców rządzą równania

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = k(y-x) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Najszybciej można dojść do wyniku traktując x i y jako części rzeczywiste pewnych wielkości zespolonych $x' = A\mathrm{e}^{\sigma t}$, $y' = B\mathrm{e}^{\sigma t}$. Analogiczne rozwiązywanie w liczbach rzeczywistych jest dość kłopotliwe i prościej jest skorzystać z faktu, że α jest małe, a więc w pierwszym przybliżeniu można przyjąć $\alpha = 0$, czyli $x = A\cos(\omega t)$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$. Siła działająca na zamocowany koniec jest równa kx, a dopuszczając teraz jego ruch stwierdzamy, że tracona moc wynosi $Fv = \alpha F^2 = \alpha k^2x^2$. Średnia wartość tej mocy jest równa $\alpha k^2A^2/2$, a przyrównując ją (ze znakiem minus) do pochodnej względem czasu z energii $E = kA^2/2$ dochodzimy do równania

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\alpha kA,$$

którego rozwiązaniem jest $A(t) = A_0\exp(-\alpha kt/2)$. Spadek amplitudy do połowy wartości początkowej nastąpi po czasie $\tau = 2\ln 2/(\alpha k)$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 191 (WT=2,89) i 192 (WT=3,44) z numeru 1/1995

Zbigniew Galias	– Kraków	35,22
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	31,44
Aleksander Surma	– Myszków	28,53
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	20,38
Przemysław Gworys	– Częstochowa	17,93

Po rekordowo długim (7-letnim!) okresie „uśpienia" powrócił do Ligi p. Galias. Czyżby tak długo trwała uraza po omyłkowym pominięciu Pana w czołówce 7 lat temu? Przepraszamy i witamy w Lidze!