Czarna dziura

Już w XVIII wieku wiedziano, że pocisk wystrzelony z prędkością v z powierzchni kuli o promieniu R i masie M oddali się od tej kuli dowolnie daleko (*ucieknie do nieskończoności*) tylko wtedy, gdy

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Ta graniczna wartość to tzw. *druga prędkość kosmiczna* lub *prędkość ucieczki.*

Powstaje pytanie, czy może istnieć tak gęsta materia, by od niej nie dało się uciec. Pomysł rozwiązania nasuwa się od razu: z powyższego wzoru możemy obliczyć, jak mały musiałby być promień kuli o masie M, by prędkość ucieczki wynosiła dla niej c, czyli prędkość światła. Taki promień to

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2}.$$

Z kuli o jeszcze mniejszym promieniu i tej samej masie nawet światło nie wydostałoby się. Każda taka kula to *czarna dziura*. *Czarna* – bo skoro światło się z niej nie wydostaje, to tym bardziej nie może ona świecić. Właściwiej byłoby jednak nazwać ją niewidzialną.

Dziura jest lepiej dobranym słowem: co bowiem do czarnej dziury trafi, na zawsze jest dla nas stracone.

Rozumowanie, jakiego użyliśmy dla stwierdzenia możliwości istnienia czarnych dziur, jest niepoprawne: zastosowaliśmy mechanikę klasyczną do problemu, który trzeba rozpatrywać na gruncie teorii względności (tak jest zawsze, gdy odwołujemy się do prędkości światła). Jednak wynik uzyskany poprawnie jest – o dziwo – taki sam !

Co więcej, czarne dziury najprawdopodobniej istnieją w przyrodzie. Gdy dostatecznie masywna gwiazda wybucha jako supernowa, to jej jądro, nie będąc w stanie niczym zrównoważyć własnej grawitacji, zapada się tak bardzo, że staje się mniejsze od odpowiedniego dla jego masy R_0. Nie wiemy, co dzieje się wtedy z materią jądra tej gwiazdy, bo do czarnej dziury – z definicji – zajrzeć się nie da.

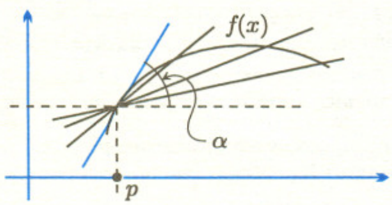
Możemy jedynie odkrywać miejsca we Wszechświecie, gdzie mogą być czarne dziury. To takie miejsca, w których nie ma nic, a które przyciągają okoliczną materię. Grawitacja jest bowiem jedynym oddziaływaniem czarnej dziury z jej otoczeniem.

Pochodna

Jeśli krzywa nie ma „skoków" ani „dziobków", to w każdym punkcie ma dobrze określoną styczną. Jeśli krzywa taka jest na dodatek wykresem funkcji, a styczna nie jest pionowa, to funkcję tę nazywamy *różniczkowalną*. Prosta styczna ma tę własność, że w niewielkiej odległości od punktu styczności najlepiej ze wszystkich prostych przybliża krzywą.

Te funkcje mają punkty nieróżniczkowalności, czyli punkty, w których ich wykresy nie mają stycznej.

Jeśli zatem styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(p,\ f(p))$ ma równanie $y = ax + b$, to funkcja g dana wzorem $g(x) = ax + b$ najlepiej ze wszystkich funkcji liniowych przybliża funkcję f niedaleko argumentu p.



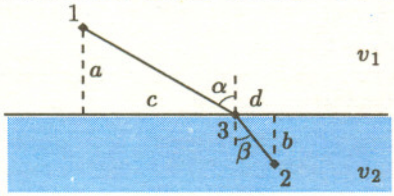
Kąt α odchylenia stycznej od poziomu spełnia warunek: $\operatorname{tg}\alpha = a$. Liczba a mierzy zatem szybkość (i kierunek) zmian wartości funkcji f i nazywa się *pochodną* funkcji f w punkcie p. Oznacza się ją na ogół przez $f'(p)$. Pojęcie pochodnej zostało wzięte z fizyki – jest to *prędkość chwilowa* ruchu, w którym f opisuje, ile drogi zostało przebyte. Styczna jest granicznym położeniem siecznej, stąd

$$a = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \text{ czyli } f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Styczna jest pozioma, gdy pochodna jest równa 0 – jest to warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. Dla $f(x) = x^3$ mamy $f'(0) = 0$, a ekstremum nie ma – nie jest to więc warunek dostateczny.

Optyka geometryczna, czyli zasada minimum

Optyka geometryczna opiera się na zasadzie, że światło rozchodzi się po takiej drodze, której przebycie zajmuje jak najmniej czasu (*droga minimalna*). Jeśli przestrzeń jest *jednorodna* i *izotropowa* (nie ma wyróżnionych punktów ani kierunków), to minimalną drogą jest linia prosta. Nietrudno znaleźć minimalną drogę, gdy mamy dwa ośrodki jednorodne i izotropowe rozgraniczone płaszczyzną. Niech prędkości światła w tych ośrodkach będą odpowiednio v_1 i v_2, źródło światła niech będzie w punkcie 1; oświetlić chcemy punkt 2 – znamy położenie tych punktów, to znaczy znamy a, b i $L = c + d$.



Aby znaleźć punkt 3 , czyli np. długość c, obliczamy czas przebycia drogi z 1 do 2 jako funkcję c

$$t(c) = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(L-c)^2}}{v_2}$$

i szukamy jego najmniejszej wartości. Ponieważ funkcja t jest różniczkowalna i przyjmuje ekstremum, więc jest ono w jedynym punkcie, gdzie pochodna jest równa 0. Odpowiada to sytuacji, gdy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

co jest znane jako *prawo Snella.*

Metoda taka z powodzeniem daje się zastosować do całej mechaniki klasycznej – zamiast czasu minimalizuje się wielkość zwaną działaniem (całkę z różnicy energii kinetycznej i potencjalnej wzdłuż drogi). Jest ona równoważna drugiej zasadzie dynamiki dla sił potencjalnych.