Oscylacje

Ruch jest zjawiskiem powszechnym. Obserwowane ruchy możemy podzielić na dwie bardzo ogólne klasy w zależności od tego, czy poruszające się ciało pozostaje w pobliżu ustalonego miejsca, czy też nie. Do pierwszej klasy zaliczamy oscylacje: ruch wahadła, drgania strun i płyt, falowanie liści drzew i kłosów zbóż, łopot flagi i powłoki namiotu na wietrze, drgania elektronów w układach elektrycznych i w atomach, drgania powietrza i pól elektromagnetycznych.

Niektóre z powyżej przytoczonych przykładów to bardzo skomplikowane ruchy, ale wszystkie charakteryzują się cyklicznością, powtarzaniem się pewnych zdarzeń w taki sposób, że czas między kolejnymi powtórzeniami jest (w przybliżeniu) stały. Najprostszy z nich to *ruch drgający prosty*, czyli ruch *harmoniczny*, w którym wychylenie od ustalonego miejsca – zwanego *położeniem równowagi* – jako funkcję czasu opisuje funkcja sinus

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t + \alpha_0).$$

Bardziej skomplikowane ruchy można rozłożyć (dokonać rozkładu harmonicznego) na sumę drgań prostych o ustalonych częstościach.

Z pomocą pianina możesz sam dokonywać (przybliżonego) rozkładu harmonicznego różnych dźwięków. Na przykład, przy naciśniętym pedale tłumienia zawołaj w pobliżu strun i płyty rezonansowej jakąś samogłoskę i posłuchaj, które struny „odezwą się".

Bomba czy reaktor?

Znamy dwa sposoby uzyskiwania energii z reakcji jądrowych: rozszczepienie jąder pierwiastków ciężkich (uranu, plutonu) i synteza pierwiastków lekkich (helu z wodoru).

Technicznie opanowany jest sposób pierwszy – potrafimy zarówno spowodować wybuch bomby, jak i kontrolować proces rozszczepienia w reaktorach. Drugiego sposobu, syntezy, nie potrafimy jeszcze kontrolować; możemy wykorzystywać tylko – niestety – gwałtowną reakcję w bombie wodorowej.

Tymczasem na tej zasadzie działa Słońce i ogromna większość gwiazd. Wykazał to Hans Bethe w latach czterdziestych (Nagroda Nobla w 1967 r.). To dlaczego Słońce nie wybucha jak gigantyczna bomba wodorowa? Otóż (po pierwsze) Słońce pracuje na granicy możliwości zachodzenia reakcji syntezy, a wtedy (po drugie) skuteczny jest mechanizm powodujący, że jeżeli gdzieś reakcja zaczyna się toczyć gwałtowniej, to odpowiednia objętość materii słonecznej rozdyma się i tempo reakcji spada.

Tak więc gwiazdy są mechanizmami z własną regulacją, a ponadto – mówiąc obrazowo – reakcja syntezy w nich zaledwie się tli. Dlatego zresztą mogą być tak długowieczne.

Suma nieskończona i iloczyn nieskończony

Dodawanie skończonej długości można przedłużać w nieskończoność, ale to, co się wtedy otrzymuje, nie zawsze ma sens:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots, \qquad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\ldots, \qquad 1-1+1-1+1-1+\ldots.$$

Lewa nieskończona suma (inaczej: *szereg*) ma wartość 1, gdyż wartości jej skończonych coraz dłuższych początkowych fragmentów coraz lepiej przybliżają tę liczbę. Kto nie wierzy, może pomyśleć o tym, jak w godzinę zjada się tabliczkę czekolady: w pół godziny pół tabliczki, potem w kwadrans ćwierć i tak dalej.
Środkowa suma nie ma wartości liczbowej, ale można jej przypisać wartość ∞, gdyż wartość jej początkowych fragmentów nieograniczenie rośnie. Przekonać się o tym można, gdy się zauważy, że suma jej k wyrazów, od $\frac{1}{k+1}$ do $\frac{1}{2k}$ jest dla każdego k większa od $\frac{1}{2}$.
Wreszcie trzecia suma nie ma żadnego sensu, gdyż nie przybliża żadnej liczby, ani też nie rośnie, ani nie maleje nieskończenie.

Teoria sumowania nieskończonego nie jest algorytmizowalna, to znaczy nie ma w niej gotowych recept na stwierdzenie, czy szereg przedstawia sobą liczbę, czy też nieskończoność, a może jest napisem bezsensownym. Np. stwierdzenie, że suma nieskończona

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots$$

jest, dla $|q| < 1$, równa $\frac{a}{1-q}$, nie nastręcza trudności. Nieco trudniej zauważyć to, co Leibniz: jeżeli sumujemy wyrazy nieskończonego ciągu monotonicznie zbieżnego do zera, stawiając przed co drugim z nich znak minus, to zawsze otrzymamy w wyniku sumowania liczbę. Ale nawet jeśli się o tym wie, to i tak nie widać, że wstawienie co drugiego minusa w środkowy z podanych na wstępie szeregów da akurat

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\ldots = \ln 2.$$

Podobnie, nie jest rzeczą prostą odkryć, że szereg

$$4-\tfrac{4}{3}+\tfrac{4}{5}-\tfrac{4}{7}+\tfrac{4}{9}-\ldots$$

przedstawia liczbę π. Trudności z sumowaniem szeregów biorą się z tego, że sumowanie nieskończone wyrazów o różnych znakach nie jest na ogół ani łączne, ani przemienne.

Analogicznie przedstawia się sytuacja iloczynów nieskończonych. Np. iloczyn

$$\tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{7}\cdot\ldots$$

ma określoną wartość liczbową (konkretnie $\frac{1}{2}\pi$), ale odkrycie tego nie jest rzeczą prostą. Choć kłopot jest ten sam – funkcja logarytm powoduje, że kto zna nieskończone sumy, ten zna i nieskończone iloczyny.

Naprawdę ważną rolę w matematyce odgrywają sumy nieskończone funkcji. Najprostszym, ale do tej pory najważniejszym przykładem są szeregi potęgowe, czyli wielomiany nieskończonej długości. Np. szeregi

$$x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}-\tfrac{x^7}{7!}+\ldots, \qquad x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}+\tfrac{x^5}{5}-\ldots$$

przedstawiają: ten z lewej $\sin x$, a ten z prawej $\ln(1+x)$ – oczywiście ten drugi ma sens tylko dla $x \in (-1,1\rangle$. Przedstawianie funkcji jako szeregów potęgowych pozwala stosować do ich badania metody pochodzące z algebry.

Szeroko stosowane jest też rozwijanie funkcji w szeregi trygonometryczne. Np. $\frac{x-x^2}{8} = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi)^3} + \frac{\sin(3\pi x)}{(3\pi)^3} + \frac{\sin(5\pi x)}{(5\pi)^3} + \frac{\sin(7\pi x)}{(7\pi)^3} + \ldots$