Algorytm Euklidesa

Proponujemy następującą zabawę, która będzie opisana na przykładzie.

$$\frac{21}{15}=1+\frac{6}{15}=1+\frac{1}{\frac{15}{6}}=1+\frac{1}{2+\frac{3}{6}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{6}{3}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}.$$

Kolejne równości powstają tak: dzielimy 21 przez 15 z resztą, $21=1\cdot 15+6$, i stąd otrzymujemy pierwszą równość. Teraz ułamek $\frac{6}{15}$ odwracamy i mamy równość drugą. Wykorzystując następnie dzielenie z resztą $15=2\cdot 6+3$ otrzymujemy trzecią równość. Teraz ułamek odwracamy... W końcu nasza zabawa zakończyła się: 6 podzieliło się przez 3 bez reszty i dalej nic się nie da zrobić.

Powyższą zabawę można powtarzać dla dowolnych ułamków liczb naturalnych $\frac{m}{n}$. Okazuje się, że zawsze zakończy się ona po skończonej liczbie kroków (dlaczego?), dając rozwinięcie $\frac{m}{n}$ w postaci tzw. ułamka łańcuchowego

$$\frac{m}{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots+\cfrac{1}{a_k}}}.$$

Popatrzmy jeszcze raz na otrzymane na początku rozwinięcie $\frac{21}{15}$. W ostatnim kroku wykonaliśmy dzielenie bez reszty $6:3$. Zauważmy, że mianownik tego dzielenia to nic innego tylko $\mathrm{NWD}(21,15)$. Czy to przypadek? Nie. Okazuje się, że gdy $\mathrm{NWD}(m,n)>1$, to zawsze w ostatnim kroku rozwijania ułamka $\frac{m}{n}$ na ułamek łańcuchowy wykonujemy dzielenie bez reszty i mianownik tego dzielenia jest równy $\mathrm{NWD}(m,n)$ (dlaczego?). Opisana metoda znajdowania największego wspólnego dzielnika nazywa się algorytmem Euklidesa.

A co się stanie, gdy $\mathrm{NWD}(m,n)=1$? Prześledź to na przykładzie $\frac{7}{5}$.

Prawa Keplera

Chociaż Kopernik centralnym ciałem naszego układu planetarnego uczynił Słońce, to ruch planet jeszcze przez kilkadziesiąt lat opisywano jak za dawnych czasów, mianowicie składano z wielu jednostajnych ruchów kołowych. Dlatego hipoteza Kopernika była światopoglądowo rewolucyjna, ale naukowe znaczenie miała wtedy minimalne.

Kepler, z usposobienia mistyk, szukał w ruchach planet wyższej harmonii – cokolwiek miałoby to znaczyć. I znalazł! Metodą prób i błędów wykrył, że do opisu ruchu planety zamiast wielu epicykli wystarczy jedna elipsa – obecnie fakt ten nazywamy pierwszym prawem Keplera.

Z kolei ruch po elipsie odbywa się z prędkością zmienną, tak że stała jest prędkość polowa planety, tzn. pole omiatane przez jej promień wodzący w jednostce czasu. Dziś wiemy, że jest to innymi słowami wyrażona zasada stałości momentu pędu planety, którą nazywamy drugim prawem Keplera.

Prawo trzecie dotyczy Układu Słonecznego jako całości i głosi, że okres T obiegu planety i promień a jej orbity są związane zależnością

$$\text{ułamek } \frac{T^2}{a^3} \text{ jest taki sam dla wszystkich planet}.$$

Co prawda, jak powiedzieliśmy, orbity planet nie są kołowe, ale różnią się od kół niewiele, a ponadto gdyby nawet były silnie spłaszczone, to przez a należałoby rozumieć średnią arytmetyczną najmniejszej i największej odległości planety od Słońca (jest to wielka półoś orbity danej planety) i wszystko byłoby w porządku. Dla orbit kołowych prawo to jest łatwo wyprowadzić z przyrównania przyspieszenia grawitacyjnego i dośrodkowego planety.

Przyroda demonstruje słuszność tych praw w niezliczonych przykładach, to one bowiem rządzą ruchami również satelitów, także sztucznych, gwiazd podwójnych itd. Warto może też wiedzieć, że to z nich Newton wyprowadził postać prawa grawitacji, chociaż w istocie są one jego konsekwencjami.

Gazy

W przeciwieństwie do ciał stałych i cieczy gazy bardzo łatwo poddają się zmianom objętości.

Współcześni Newtonowi Robert Boyle i Edme Mariotte zauważyli, że objętość danej ilości *dowolnego* gazu w stałej temperaturze jest odwrotnie proporcjonalna do jego ciśnienia.

W sto lat później Joseph Gay-Lussac i Jacques Charles stwierdzili, że ciśnienie *dowolnego* gazu zawartego w stałej objętości wzrasta o 1/273 początkowej wartości przy ogrzaniu o jeden stopień Celsjusza. Ściśliwość i rozszerzalność termiczna ciał stałych i cieczy zależy natomiast w istotny sposób od rozpatrywanej substancji i podlega znacznie bardziej skomplikowanym prawom (na przykład woda).

Powyższe dwa prawa ujawniają więc niesłychaną prostotę struktury wewnętrznej gazów. Wszystkie gazy zachowują się tak samo – wszystkie gazy są „wzorcowe".

Oczywiście, jest to prawda jedynie w pewnym, choć bardzo szerokim, zakresie temperatur i ciśnień. Gdyby bowiem gaz o temperaturze początkowej 0°C oziębić do temperatury 273°C niższej, to zarówno ciśnienie, jak i objętość powinny spaść do zera – co definiuje zero bezwzględne temperatury. Tak się jednak nie dzieje. Gazy rzeczywiste bowiem, w odróżnieniu od ich idealizacji zwanej gazem doskonałym, w pewnej temperaturze skroplą się w ciecz, której nie można już dowolnie ścisnąć. Ujawnia się w ten sposób skończoność rozmiarów molekuł gazu. Poza tym powyższe prawa nie uwzględniają też sił międzycząsteczkowych istotnych przy małych odległościach między cząsteczkami gazu. Prawa dla gazów rzeczywistych są bardziej skomplikowane.

Niemniej jednak, podobnie jak w innych działach fizyki, często dokonujemy idealizacji opisu, jeśli nie prowadzi ona do zbyt grubych przybliżeń. Osiąga się wtedy większą przejrzystość interpretacji zjawisk, co prowadzi do lepszego ich zrozumienia.