

Nierówność Fejéra–Jacksona

Jarosław GÓRNICKI

Kilka lat temu od zaprzyjaźnionego matematyka niemieckiego otrzymałem wydaną w 1987 roku książkę pod znamionym tytułem „Die 100 schönsten Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR mit eleganten Lösungen, Klassenstufen 11/12”.

Przeglądając ją ostatnio zatrzymałem się na zadaniu 34:

Udowodnić, że dla wszystkich $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x > 0.$$

Zadanie jak zadanie – pomyślałem, wziąłem kartkę papieru i nierówność uzasadniłem. Wystarczyły standardowe wzory trygonometryczne na $\sin 2x$, $\sin 3x$ i kilka przekształceń – nic nadzwyczajnego. Sięgnąłem do rozwiązań autorów książki. Zainterесowała mnie uwaga mówiąca, że „prawdziwa jest ogólniejsza nierówność

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin kx > 0 \quad \text{dla } x \in (0, \pi) \text{ i } n = 1, 2, 3, \dots,$$

ale jej dowód jest dość skomplikowany”.

Zabrzmiało to trochę jak wyzwanie. Po jakimś czasie miałem również i jej uzasadnienie. Dowód, wbrew zapowiedziom, nie okazał się trudny, wykorzystałem indukcję i proste fakty z rachunku różniczkowego dostępne dla uczniów szkół średnich.

Aby zobaczyć, jak nierówność ta jest uzasadniana w literaturze, sięgnąłem po książkę D.S. Mitrinovicia „Elementarne nierówności”, PWN, Warszawa 1972. Znalazłem ją tam jako Problem 3.15 (str. 155). Ku mojemu zaskoczeniu proponowane tam uzasadnienie wymaga (zaawansowanej) umiejętności całkowania funkcji zespolonych po krzywych zamkniętych!

Zacząłem poszukiwać innych opublikowanych uzasadnień tej nierówności. Dowiedziałem się wtedy, iż w 1910 roku matematyk węgierski Lipót Fejér (1880–1959) badając szeregi trygonometryczne wykazał, że funkcja

$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \in (0, \pi),$$

osiąga maksimum dla $x = \frac{\pi}{n+1}$, a ponadto spełnia warunki

$$S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > S_{n-1}\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad n \geq 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx 1,85193.$$

(Wykazanie tych zależności może być pouczającym ćwiczeniem.)

Fejér wyraził również przypuszczenie, że

$$S_n(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (0, \pi) \text{ i } n = 1, 2, 3, \dots$$

Powyższą hipotezę udowodnili niezależnie D. Jackson [1] w 1911 roku i T.H. Gronwall [2] w 1912 roku. W latach następnych pojawiały się dowody innych autorów, między innymi krótki dowód E. Landaua [3] z 1933 roku.

Metale z ciężkimi elektronami

Jan KARBOWSKI

Zapewne każdy ze szkoły pamięta, że masa elektronu jest około 2000 razy mniejsza od masy protonu. Każdy też wie, że prąd elektryczny w metalach jest strumieniem elektronów przewodnictwa oderwanych od macierzystych atomów (tzw. nośniki prądu elektrycznego). Zatem należałoby się spodziewać, że masa nośników prądu m oszacowana na podstawie wzoru

$$(1) \quad \frac{mv}{\tau} = eE$$

powinna być w przybliżeniu równa masie elektronu wziętej z tablic fizycznych.

W powyższym wzorze v jest prędkością dryfu elektronów, τ – średnim czasem między rozproszeniami elektronów, e – ładunkiem elektronu, E zaś przyłożonym polem elektrycznym.

Ewentualne drobne odstępstwa od wartości tablicowej można by próbować wytłumaczyć wpływem oddziaływania z siecią jonów (atomów, które utraciły elektrony). Powyższe rozumowanie zastosowane do metali alkalicznych rzeczywiście daje dobre oszacowanie.

Jednak pod koniec lat 70. i na początku 80. zaczęto syntetyzować nowe związki międzymetaliczne na bazie pierwiastków ceru i uranu, w których mierzone masy nośników prądu były niezwykle duże, rzędu 100 – 1000 mas elektronu. Krótko mówiąc, „elektrony przewodnictwa” w tych związkach są prawie tak ciężkie jak protony! Stąd też wzięła się nazwa „ciężkie fermiony” dla takich układów (słowo **fermiony** oznacza klasę cząstek o pewnych własnościach kwantowomechanicznych, do której należą, między innymi, elektrony, protony i neutrony; drugą klasę cząstek stanowią tzw. **bozony**, do której należy np. foton).

Spróbujmy zrozumieć, jaki jest mechanizm powstawania tak wielkich mas. Zanim zajmiemy się sytuacją w kryształach, poświęćmy parę zdań atomom. Wokół jądra izolowanego atomu (tzn. będącego daleko od pozostałych) elektrony poruszają się w pewien uporządkowany sposób, który jednak odbiega od klasycznych wyobrażeń. Nie wszystkie rodzaje ruchu są możliwe, lecz tylko pewne wyróżnione. Określony rodzaj ruchu jest związany ze stanem, w jakim znajduje się elektron. Stan taki nosi nazwę kwantowomechanicznego i może być opisywany tylko w kategoriach mechaniki kwantowej.

W kryształach atomy tworzą sieć krystaliczną, tzn. nie można już ich traktować jako izolowane. „Czują” one nawzajem swoją obecność. Efektem tej bliskości jest modyfikacja ruchów elektronowych (stanów kwantowych) dla elektronów z dala od jądra. Dla niektórych stanów może być ona znaczna, zmieniając całkowicie charakter ruchu, dla innych minimalna. W pierwszym przypadku elektrony mogą poruszać się pomiędzy atomami, tracąc więc z macierzystym atomem; następuje tzw. kolektywizacja elektronów, a stany takie nazywa się rozciągłymi. W drugim przypadku ruch elektronów pozostaje zasadniczo wewnątrzatomowy, bez możliwości przeskoku na inne atomy. Stany takie noszą nazwę zlokalizowanych.

W metalach alkalicznych, takich jak lit czy sód, stany elektronowe z powłok zewnętrznych atomów ulegają takim zmianom jak w pierwszym przypadku. Tworzą więc stany rozciągle i elektrony mogą poruszać się swobodnie wzdłuż całego kryształu.

Istnieją też związki, w których realizowany jest drugi przypadek, tj. gdy stany elektronowe nie ulegają zasadniczym zmianom. Mimo że powłoki zewnętrzne nie są zapełnione (tak jak dla atomów metali alkalicznych), elektrony nie mają możliwości ruchu kolektywnego i po przyłożeniu napięcia otrzymujemy $v = 0$. Zgodnie ze wzorem (1) prowadzi to do wniosku, że masa efektywna nośników jest nieskończona. Tak więc potencjalny metal staje się izolatorem. Ten typ izolatora (w odróżnieniu od tradycyjnego, w którym powłoki zewnętrzne są zapełnione) nosi nazwę izolatora Motta–Hubbarda. Przykładem jest tu związek V_2O_3 .

Najciekawsza sytuacja powstaje wtedy, gdy kryształ składa się jednocześnie z dwóch rodzajów atomów: rozciągających i lokalizujących stany elektronowe. Właśnie ten przypadek ma miejsce dla ciężkich fermionów. Rolę atomów lokalizujących ruch elektronów pełnią atomy ceru bądź uranu. Przykładowe związki z tej klasy materiałów to: UPt_3 , UBe_{13} , UPd_2Al_3 , $CeCu_2Si_2$ oraz $CeAl_3$. Aby w pełni zrozumieć ich własności, trzeba użyć formalizmu statystycznej teorii pola. My jednak postaramy się wytłumaczyć powstawanie dużych mas efektywnych przy użyciu znacznie skromniejszych środków. Ciężkie fermiony można rozpatrywać jako układ, w którym elektrony przebywają w dwóch stanach kwantowych: $|L\rangle$ (zlokalizowanym) i $|R\rangle$ (rozciągłym). Powyższe oznaczenie dla stanu

Twierdzenie 1 (nierówność Fejéra–Jacksona).

Jeżeli $x \in (0, \pi)$, to

$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx > 0$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Dowód. Dla $n = 1$ i $x \in (0, \pi)$ nierówność $S_1(x) = \sin x > 0$ jest oczywista. Gdy $n = 2$,

$$S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cdot (1 + \cos x) > 0$$

dla $x \in (0, \pi)$. Załóżmy, że dla $x \in (0, \pi)$ i ustalonego $n - 1 \geq 1$ mamy $S_{n-1}(x) > 0$. Wykażemy, że wówczas dla $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest nierówność

$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \sin nx > 0.$$

Rozważmy przypadki:

1. Gdy $x \in \{y \in (0, \pi) : \sin ny \geq 0\}$, to oczywiście

$$S_n(x) \geq S_{n-1}(x) > 0.$$

2. Gdy $x \in \{y \in (0, \pi) : \sin ny < 0\} = B_n$, to korzystając z tożsamości $2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \alpha - \sin \beta$, mamy następujący wzór na pochodną funkcji S_n :

$$\begin{aligned} S'_n(x) &= \sum_{k=1}^n \cos kx = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\left(\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x \right) + \left(\sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right)x - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right)x \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right)x - \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin nx \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cdot (\cos nx - 1) \right) < 0. \end{aligned}$$

Czytelnik, który nie pamięta tożsamości trygonometrycznych, lecz słyszał za to o funkcji wykładniczej w dziedzinie zespolonej, może zauważyć, że

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikx}) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n e^{ikx}.$$

Dalej już jest łatwo – trzeba tylko umieć sumować ciąg geometryczny.

Zauważmy teraz, że zbiór B_n składa się ze skończonej liczby otwartych, rozłącznych przedziałów, np. $B_4 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Niech (a, b) będzie jednym z przedziałów tworzących zbiór B_n .

Funkcja S_n jest:

- 1) malejąca w (a, b) ,
- 2) ciągła w punktach a i b ,
- 3) $\sin nb = 0$.

Zatem

$$S_n(x) > S_n(b) = S_{n-1}(b) + \frac{1}{n} \sin nb = S_{n-1}(b) \geq 0$$

dla $x \in (a, b)$, a tym samym dla wszystkich $x \in B_n$. Wobec tego na podstawie zasady indukcji matematycznej nierówność $S_n(x) > 0$ jest prawdziwa dla $x \in (0, \pi)$ i wszystkich $n \in \mathbf{N}$. ■

W zupełnie analogiczny sposób można udowodnić „bliźniaczą” nierówność. Pojawia się ona, na przykład, jako zadanie 241 w „The Otto Dunkel Memorial Problem Book”, *American Mathematical Monthly* 64, no 7, part II, 1957 (istnieje przekład na język rosyjski: „Izbrannyje zadaczi iz żurnala American Mathematical Monthly”, Moskwa 1977). Zachęcam Czytelnika, by naśladowując dowód z poprzedniej strony, udowodnił samodzielnie

Twierdzenie 2. Jeżeli $x \in (0, \pi)$, to

$$C_n(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \dots + \frac{1}{n} \cos nx > -1$$

dla $n = 1, 2, \dots$

Uwaga 1. Jedynie dla $n = 1$ i $x = \pi$ ma miejsce równość

$C_1(\pi) = -1$; ponadto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq x \leq \pi} C_n(x) = -\ln 2 \approx -0,693147.$$

Uwaga 2. Czytelnik znający teorię szeregów Fouriera bez trudu

sprawdzi, że dla $x \in (0, \pi)$

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \dots = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right).$$

Literatura

[1] D. Jackson, „Über eine trigonometrische Summe”, *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo* 32 (1911), 257–262.

[2] T.H. Gronwall, „Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx$ ”, *Math. Ann.* 72 (1912), 223–243.

[3] E. Landau, „Über eine trigonometrische Ungleichung”, *Math. Zeitschr.* 37 (1933), 36.

Najnowszy 3,5-metrowy teleskop w Apache Point Observatory w Nowym Meksyku ma być dostępny dla wielu astronomów z całego świata bez potrzeby jechania do obserwatorium. W pełni zautomatyzowany teleskop będzie można kontrolować za pomocą sieci komputerowej Internet. Również siecią będą przesyłane wyniki obserwacji.

Po wieloletnich badaniach około 20 tysięcy zdjęć Saturna zrobionych przez Voyagera 2 w 1981 roku M. Gordon i C. Murray z Londynu doszli do wniosku, że Saturn ma o 7 księżyców więcej niż sądzono. Saturn jest więc w tej dziedzinie niewątpliwym rekordzistą z dwudziestoma księżycami. Następna okazja do zbadania okolic Saturna nastąpi w 2004 roku, gdy zbliży się do niego sonda kosmiczna Cassini.

Poszukiwania w zakresie optycznym galaktyki silnie emitującej fale radiowe doprowadziły do odkrycia najbardziej odległej galaktyki. Astronomowie z Wielkiej Brytanii, Holandii i USA za pomocą teleskopu Herschela, znajdującego się na Wyspach Kanaryjskich, odkryli w gwiazdozbiornie Draco galaktykę oznaczoną w katalogu radioźródeł symbolem 8C 1435+635. Galaktyka ta znajduje się w odległości około 8 miliardów lat świetlnych od Ziemi i w momencie, gdy obserwowane przez nas światło opuszczało galaktykę, Wszechświat był 5 razy mniejszy niż obecnie.

kwantowego znane jest pod nazwą notacji Diraca. Okazuje się, że np. elektron w stanie $|L\rangle$ może przejść w stan $|R\rangle$ i na odwrót. Innymi słowy, elektron, którego ruch początkowo był ograniczony do najbliższego otoczenia atomu, nagle może zmienić charakter swojego ruchu i poruszać się w całym kryształ. Powyższy proces nosi nazwę mieszania stanów kwantowych. Zamiast mówić o dwóch rodzajach stanów, wygodnie nieraz jest mówić o dwóch rodzajach elektronów A i B (oczywiście, w rzeczywistości istnieje tylko jeden rodzaj elektronów).

Po przyłożeniu napięcia elektrycznego przez metal zaczyna płynąć prąd, którego wartość przypadająca na jeden elektron j jest dana przez proporcjonalność:

$$(2) \quad j \sim n_A v_A + n_B v_B,$$

gdzie v_A i v_B są prędkościami dryfu dla elektronów A i B , a n_A i n_B są ich odpowiednimi względnymi koncentracjami, przy czym $n_A + n_B = 1$.

Ostatnia równość oznacza, że elektron może znajdować się wyłącznie w stanie $|A\rangle$ lub $|B\rangle$. Załóżmy teraz, że elektron przebywa w stanie $|A\rangle$ część α swego czasu, a w stanie $|B\rangle$ część β . Jeśli tak, to powinna zachodzić równość $\alpha + \beta = 1$.

Zauważmy ponadto, że im dłużej elektrony przebywają w stanie $|A\rangle$, tym bardziej wydaje się, że jest ich więcej w tym stanie. Czyli mamy relacje

$$n_A \sim \alpha \quad \text{oraz} \quad n_B \sim \beta.$$

Wykorzystując teraz fakt, że wzór (1) jest słuszny dla obu rodzajów elektronów, tzn.

$$\frac{m_A v_A}{\tau_A} = eE = \frac{m_B v_B}{\tau_B}$$

i zakładając, że czas między rozproszczeniami jest taki sam ($\tau_A = \tau_B = \tau$), możemy napisać, że prąd

$$(3) \quad j \sim E\tau \left(\frac{\alpha}{m_A} + \frac{\beta}{m_B} \right).$$

Z drugiej strony, zamiast mówić o dwóch rodzajach nośników, równoważnie możemy mieć do czynienia z jednym, który łączy w sobie cechy obu jednocześnie.

Takie obiekty noszą nazwę kwazicząstek (efektywne nośniki) i przypisuje się im pewną masę efektywną m^* . Prąd elektryczny dla kwazicząstek opisuje ten sam wzór, co dla „prawdziwych” cząstek, tj.

$$(4) \quad j \sim E\tau^*/m^*.$$

Porównując wzory (3) i (4) oraz zakładając znowu, że $\tau^* = \tau$, dostajemy dla masy efektywnej następujące wyrażenie:

$$(5) \quad m^* = \frac{m_A m_B}{\alpha m_A + \beta m_B}.$$