Klub 44

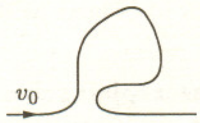
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1995

Skrót regulaminu
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z fizyki nr 201, 202

Redaguje Jerzy B. BROJAN



201. Koralik porusza się po wygiętym drucie, przy czym działa na niego tylko siła oddziaływania ze strony drutu (nie występuje np. siła ciężkości). Siła tarcia jest proporcjonalna do prostopadłej do drutu składowej siły oddziaływania, a stała proporcjonalności (współczynnik tarcia) jest równa $f = 0{,}1$. Zatem na prostoliniowych odcinkach drutu tarcie nie występuje. Jeśli kształt drutu jest taki, jak na rysunku, a początkowa prędkość wynosi $v_0 = 1$ m/s, to ile wynosi prędkość końcowa?

202. – Dostałem na urodziny nowy aparat fotograficzny – opowiadał kolegom Pstrykiewicz. – Są do niego dwa obiektywy, jeden o dłuższej, a drugi o krótszej ogniskowej. Ale można też je założyć jeden przed drugim, i wtedy otrzymuje się obiektyw o ogniskowej jeszcze krótszej! Optycki spojrzał podejrzliwie, ale nie zdążył o nic zapytać, bo Fotończyk musiał, oczywiście, pochwalić się swoim cudem techniki:
– A mój aparat też ma dwa obiektywy, i też jeden ma krótszą, a drugi dłuższą ogniskową. A gdy zamontuje się oba jeden za drugim, to ogniskowa jest jeszcze dłuższa!
– Zaraz, zaraz – wykrzyknął Optycki. – Żartujecie, któryś z was...
W pół zdania przerwał mu Kamerański.
– E tam, do chrzanu są te wasze aparaty – oświadczył.
– Do mojego też są dwa obiektywy o różnych ogniskowych, i też można je zakładać jeden za drugim, ale można to robić w dowolnej kolejności – raz otrzymuje się obiektyw o najdłuższej ogniskowej, a jeśli się je zamieni miejscami, to o najkrótszej!
– Tego już za wiele! – wołał z gniewem Optycki.
– Nabieracie mnie, tak nie może być!

Czy miał rację, a jeśli tak, to który z kolegów przesadził z zaletami swojego aparatu?
Wskazówka. Ogniskową układu optycznego (niekoniecznie składającego się z cienkich soczewek położonych blisko siebie) można zdefiniować np. tak: niech na układ pada wiązka równoległa pod niewielkim kątem α do osi; jeśli skupi się ona w płaszczyźnie ogniskowej w odległości h od ogniska, to ogniskowa f jest dana wzorem $f = h/\alpha$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1995

Przypominamy treść zadań:

197. Statek kosmiczny o masie m zaopatrzony jest w lustro odbijające światło. Jeśli na to lustro pada prostopadle wiązka światła z nieruchomego lasera o mocy P, to po jakim czasie statek zostanie rozpędzony ze spoczynku do prędkości v równej połowie prędkości światła? Siła grawitacji ani opory ruchu w zadaniu nie występują.

198. Szczelne naczynie z gazem jest przedzielone na dwie części o nierównych objętościach i izolowane termicznie. Grzałka elektryczna dostarcza do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła Q. W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej:
a) gdy podgrzejemy gaz w mniejszej części naczynia,
b) gdy podgrzejemy gaz w większej części naczynia,
c) gdy połowę ciepła dostarczymy mniejszej części, a połowę – większej?

197. W ciągu czasu $\mathrm{d}t$ laser wysyła światło o energii $\mathrm{d}E = P\,\mathrm{d}t$ i pędzie $\mathrm{d}p = \mathrm{d}E/\mathrm{c} = (1/\mathrm{c})P\,\mathrm{d}t$. Droga przebyta przez światło w tym czasie wynosi $\mathrm{c}\,\mathrm{d}t$, a przez statek $v\,\mathrm{d}t$, więc w czasie $\mathrm{d}t$ (mierzonym w układzie nieruchomym) odbije się od lustra tylko część wspomnianej „porcji" promieniowania, dana ułamkiem $(\mathrm{c}-v)/\mathrm{c}$. Aby obliczyć pęd światła odbitego, musimy najpierw przejść do układu odniesienia związanego ze statkiem. W tym układzie promień ma pęd mniejszy o czynnik $\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$, gdzie $\beta = v/\mathrm{c}$ (można to ustalić na podstawie transformacji Lorentza dla pędów, albo też skorzystać ze wzoru na relatywistyczny efekt Dopplera). Odbicie od lustra zmienia zwrot pędu, a w układzie nieruchomym promień odbity ma pęd mniejszy znów o ten sam czynnik. Podsumowując, zmiana pędu promienia (czyli także statku) jest dana wzorem

$$\mathrm{d}p_s = \frac{1}{\mathrm{c}} P\,\mathrm{d}t(1-\beta)\left(1 + \frac{1-\beta}{1+\beta}\right) = \frac{2}{\mathrm{c}}\frac{1-\beta}{1+\beta} P\,\mathrm{d}t .$$

Po wprowadzeniu „bezwymiarowego czasu" $\tau = Pt/(m\mathrm{c}^2)$ równanie ruchu statku przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 2\frac{1-\beta}{1+\beta} .$$

Równanie to można scałkować analitycznie, ale otrzymane wyrażenia są dość skomplikowane. Stwierdzamy, że przy warunku początkowym $\beta(0) = 0$ funkcja $\beta(\tau)$ przyjmuje wartość 1/2 dla $\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{3} = 0{,}533$. Stąd szukany czas wynosi $t = 0{,}533\ m\mathrm{c}^2/P$.

198. Oznaczmy objętości obu części przez V_1 i V_2, ciśnienie początkowe przez p, końcowe przez p', temperatury początkowe przez T_1 i T_2, a końcowe przez T_1' i T_2'. Wprowadźmy też oznaczenia liczby moli: n_1 i n_2 na początku, a n_1' i n_2' na końcu. Z bilansu energii mamy równanie

$$\Delta U = Q = (n_1'T_1' + n_2'T_2' - n_1T_1 - n_2T_2)c_V ,$$

gdzie c_V jest ciepłem molowym gazu przy stałej objętości. Podstawiając z równania Clapeyrona $nT = pV/\mathrm{R}$ otrzymujemy

$$p'V_1 + p'V_2 - pV_1 - pV_2 = Q\mathrm{R}/c_V .$$

Stąd widać, że końcowe ciśnienie p' zależy od Q i ciśnienia początkowego p, nie zależy natomiast od rozkładu temperatur. We wszystkich opisanych przypadkach ciśnienie końcowe będzie więc jednakowe.

Zadania z matematyki nr 303, 304

Redaguje Marcin E. KUCZMA

303. Wielościan wypukły W (o wszystkich kątach dwuściennych ostrych) ma następującą własność: istnieją takie liczby naturalne $p, q \geq 3$, że każdy przekrój wielościanu W płaszczyzną przecinającą wnętrze W jest albo p-kątem albo q-kątem. Czy wielościan W musi być czworościanem?

304. Ciąg liczb (b_n) jest określony rekurencyjnie:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_n = (n+1)\left(\frac{b_{n-1}}{n} + \frac{b_{n-2}}{n-1}\right) \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$.

Zadanie **304** zaproponował pan Marcin Sarniak z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1995

Przypominamy treść zadań:

299. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których suma

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

jest liczbą całkowitą.

300. Zbiór $S \subset \mathbf{R}$ jest sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych (długości dodatniej, skończonej), parami rozłącznych. Dowieść, że dla każdej funkcji ciągłej $f\colon S \to S$ istnieje niepusty zbiór $A \subset S$ spełniający równość $f(A) = A$.

299. Ustalmy liczbę naturalną n i przyjmijmy

$$a_k = \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

Rozważana suma równa się

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2} a_k.$$

Jeśli $(m-1)^2 + 1 \leq k \leq m^2$, to $[\sqrt{k-1}] = m - 1$, to

$$a_k = \frac{n-m+1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = (n-m+1)(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Stąd

$$\sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2} a_k = (n-m+1) \sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) =$$

$$= (n-m+1)(m-(m-1)) = n-m+1,$$

i ostatecznie

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{m=1}^{n} (n-m+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dla każdego n jest to liczba całkowita!

300. Ponumerujmy przedziały będące składowymi rozważanego zbioru: $I_1, \ldots, I_m$. Niech $M = \{1, \ldots, m\}$. Dla każdego numeru $i \in M$ funkcja ciągła f przekształca przedział I_i na pewien przedział zawarty w zbiorze S, a więc zawarty w którymś przedziale I_j. Numer j zależy od i; oznaczmy go przez $\varphi(i)$. Została w ten sposób określona funkcja $\varphi\colon M \to M$ o tej własności, że

$$(*) \qquad f(I_i) \subset I_{\varphi(i)} \quad \text{dla } i \in M.$$

Weźmy pod uwagę następujący ciąg elementów zbioru M:

$$1,\ \varphi(1),\ \varphi^2(1),\ \varphi^3(1),\ \ldots,$$

gdzie symbol φ^k oznacza k-krotne złożenie $\varphi \circ \ldots \circ \varphi$. Zbiór M jest skończony, więc w ciągu tym muszą wystąpić powtórzenia. Zatem dla pewnych liczb całkowitych $k \geq 0$, $r \geq 1$ zachodzi równość $\varphi^k(1) = \varphi^{k+r}(1)$. Dla $j = 0, 1, \ldots, r$ oznaczmy przez J_j przedział I_i o numerze $i = \varphi^{k+j}(1)$. Tak więc $J_r = J_0$ oraz, w myśl zależności $(*)$,

$$f(J_{j-1}) \subset J_j \quad \text{dla } j = 1, \ldots, r.$$

W takim razie funkcja $f^r = f \circ \ldots \circ f$ (r-krotne złożenie) odwzorowuje przedział J_0 w ten sam przedział. Wobec ciągłości, istnieje punkt $x_0 \in J_0$, dla którego spełniona jest równość $f^r(x_0) = x_0$. Wystarczy teraz przyjąć

$$A = \{x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \ldots,\ f^{r-1}(x_0)\}.$$

Zbiór A jest przez funkcję f odwzorowywany (cyklicznie) na siebie.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 289 (WT=1,92) i 290 (WT=2,64)
z numeru 11/1994

Waldemar Pompe	– Warszawa	43,89
Mirosław Matlęga	– Skoczów	43,59
Adam Czornik	– Bytom	39,26
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,98
Janusz Olszewski	– Suwałki	36,44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 189 (WT=2,05) i 190 (WT=3,10)
z numeru 12/1994

Artur Gawryszczak	– Dubeczno	29,31
Aleksander Surma	– Myszków	28,53
Dariusz Wilk	– Rzeszów	22,23
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	17,96
Przemysław Gworys	– Częstochowa	17,64