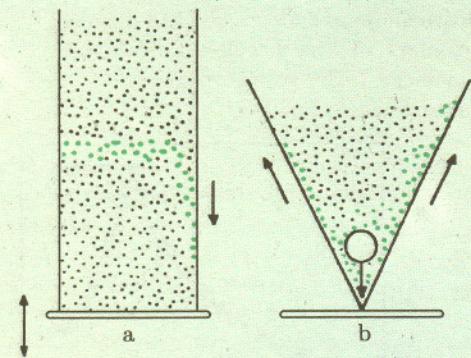


oraz 0,6 cm (których ruch pokazują odpowiednio kółka i krzyżyki) już tam pozostają, a małe ziarna (dla których  $\Delta(t)$  oznaczono kwadracikami) podążają coraz wolniej w dół. Rysunek pokazuje ciekawy fakt: Otóż zależność  $\Delta(t)$  jest wyraźnie nieliniowa. Inaczej można powiedzieć, że prędkość  $d\Delta(t)/dt$  przemieszczania się dużego ziarna nie zależy od stosunku promieni ziaren dużych i małych, natomiast rośnie wraz ze zmniejszaniem się odległości dużego ziarna od górnej powierzchni. Im większa amplituda drgań, tym bardziej stroma jest zależność  $\Delta(t)$ , czyli tym szybciej narasta tempo zbliżania się ziarna do powierzchni naczynia. Natomiast istnieje pewna krytyczna amplituda potrząśnięcia cylindrem, poniżej której konwekcja przestaje zachodzić. Nie możemy też wywołać ruchów konwekcyjnych dla upakowania ziaren większego niż pewne upakowanie krytyczne (np. gdy ubity piasek zamkniemy ciasno w naczyniu). Można również zauważyć, że gdy wypolerujemy jedynie jedną ściankę naczynia, wówczas wzory, jakie w naczyniu tworzą poruszające się ziarna, przestaną być symetryczne, jak to pokazuje rysunek 3a. Zależność ruchu konwekcyjnego od oddziaływań ziaren ze ściankami potwierdza inna obserwacja. Kierunek przemieszczania się większego ziarna można zmienić, gdy doświadczenie przeprowadzimy w naczyniu zważającym się ku dołowi. Przy takiej geometrii większe ziarna będą na stałe uwięzione na dnie naczynia (rys. 3b).



Rys. 3

Spróbujcie Państwo zbadać, jak ruch konwekcyjny zależy od nachylenia ścian potrząsanego cylindra. Pytanie, przy jakim nachyleniu ścian naczynia ruch konwekcyjny ustanie, nadal czeka na odpowiedź!

[1] James B. Knight, H.M. Jaeger i Sidney R. Nagel, *Physical Review Letters*, **70**, 3728 (1993).

## Wokół nierówności Younga

Grzegorz ŁUKASZEWICZ

W miesięczniku *Delta* co pewien czas pojawiają się artykuły o ważnych nierównościach i ich dowodach. Niniejszy artykuł nawiązuje do tej tematyki.

Będziemy rozważać pewną nierówność, zwaną **nierównością Younga**, i jej naturalne otoczenie, czyli kilka innych ważnych nierówności będących bardzo bliskimi jej konsekwencjami.

Przedstawiamy

### Nierówność Younga

Jeśli  $x$  i  $y$  są dowolnymi liczbami nieujemnymi, a liczby dodatnie  $p, q$  spełniają warunek  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , to

$$(1) \quad xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $y = x^{p-1}$ .

Zanim udowodnimy nierówność Younga, rozejrzyjmy się nieco wokół niej. Zauważmy przede wszystkim, że można ją zapisać także w postaci

$$(2) \quad a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \leq q_1 \cdot a_1 + q_2 \cdot a_2,$$

gdzie  $a_1, a_2 \geq 0$ ,  $q_1, q_2 > 0$ ,  $q_1 + q_2 = 1$  (równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2$ ). Nierówność (2) powinna się wydać bliska Czytelnikom *Delty*, kładąc bowiem  $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$ , dostajemy dobrze znaną **nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej** dla dwóch składników:

$$(3) \quad (a_1 \cdot a_2)^{1/2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Szczególnym przypadkiem nierówności Younga jest bardzo często używana, elementarna nierówność

$$(4) \quad xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

będąca także przypadkiem szczególnym **nierówności Cauchy'ego-Schwarza**

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Ostatnia nierówność wyraża fakt, że iloczyn skalarny wektorów  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, \dots, b_n)$  w  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest nie większy niż iloczyn długości tych wektorów (jest mniejszy, jeśli wektory te nie są równoległe). Uogólnieniem nierówności Cauchy'ego-Schwarza jest bardzo ważna **nierówność Höldera**

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q},$$

prawdziwa dla  $a_i \geq 0$ ,  $b_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  i dla takich  $p, q > 0$ , że  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Z nierówności Höldera wynika łatwo podstawowa **nierówność Minkowskiego**

$$(7) \quad \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p},$$



prawdziwa dla  $a_i \geq 0, b_i \geq 0, i = 1, \dots, n$  i  $p \geq 1$ . Dla  $p = 2$  nierówność (7) redukuje się do **nierówności trójkąta**

$$(8) \quad \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2},$$

która mówi, że suma długości dwu boków trójkąta jest nie mniejsza niż długość trzeciego boku.

Jeśli w nierównościach Höldera i Minkowskiego położyć  $n = \infty$ , to dostajemy nierówności prawdziwe dla sum nieskończonych:

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot b_i \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i^q \right)^{1/q}$$

oraz

$$(10) \quad \left( \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i^p \right)^{1/p},$$

gdzie  $(a_i)$  i  $(b_i)$  są teraz dowolnymi ciągami liczb nieujemnych.

Możemy wreszcie zastąpić w (9) i (10) sumy nieskończone całkami po dowolnych zbiorach, a ciągi  $(a_i)$  i  $(b_i)$  dowolnymi funkcjami całkowalnymi na tych zbiorach, z odpowiednimi potęgami. Niech np.  $I$  będzie dowolnym przedziałem na prostej liczbowej, a  $f$  i  $g$  dowolnymi funkcjami całkowalnymi na  $I$ . Wtedy

$$(11) \quad \int_I |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int_I |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

oraz

$$(12) \quad \left( \int_I |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_I |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Zauważmy, że jeśli znamy nierówności dla całek, to możemy z nich wyprowadzić nierówności dla sum (skończonych czy nieskończonych).

Wnikliwemu Czytelnikowi proponujemy teraz przerwę w czytaniu tego artykułu, samodzielną próbę udowodnienia jak największej liczby zależności między powyższymi nierównościami i zbadanie, przy jakich założeniach zachodzą nierówności ostre.

Poniżej podamy trzy poglądowe dowody nierówności Younga oraz udowodnimy nierówności Höldera (11) i Minkowskiego (12).

### Trzy dowody nierówności Younga.

Będziemy rozważać przypadek nietrywialny, gdy  $x, y > 0$ .

1) Ponieważ funkcja  $f(x) = e^x$  jest ściśle wypukła, sieczna przecinająca wykres funkcji w punktach o odciętych  $x_1$  i  $x_2$  leży w tym przedziale nad wykresem tej funkcji, co zapisujemy w postaci nierówności

$$(13) \quad f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2), \quad (q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1),$$

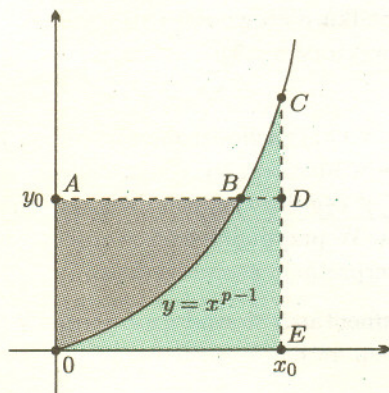
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 = x_2$ . Proste podstawienia dają nierówność (2).

2) Niech  $q_1$  będzie liczbą z przedziału  $(0,1)$ . Rozważmy krzywą będącą wykresem funkcji  $t \rightarrow t^{q_1}$  ( $t \in R$ ) i styczną do niej w punkcie  $t = 1$ . Jest oczywiste, że względu na wklęsłość krzywej, że styczna leży nad krzywą. Fakt ten wyraża nierówność  $t^{q_1} \leq q_1t + (1 - q_1)$ , przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $t = 1$ . Kładąc  $q_2 = 1 - q_1$  i  $t = a_1/a_2$  dostajemy znowu (2).

3) Niech  $p > 1$  i  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Rysujemy krzywą  $y = x^{p-1}$  i dwie proste  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , gdzie  $x_0$  i  $y_0$  są dowolnymi ustalonymi liczbami dodatnimi (rysunek). Rozważmy pola figur  $0AB$ ,  $0CE$  i prostokąta  $0ADE$ . Jest widoczne, że

$$\text{pole } 0ADE \leq \text{pole } 0AB + \text{pole } 0CE$$

(równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $y_0 = x_0^{p-1}$ ). Wyrażając pola







**Rozwiązanie zadania F 409.** Satelita krążący po orbicie na wysokości 200 km nad Ziemią praktycznie nie doznaje oporu powietrza, możemy więc uważać, że cała masa atmosfery jest skupiona poniżej tej wysokości. Ziemskie przyspieszenie grawitacyjne zmienia się w tym obszarze o około 3%, możemy je więc uważać za stałe. Ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza jest równe ciężarowi powietrza w słupie o jednostkowej podstawie  $F = mg$ , gdzie  $m$  jest masą powietrza zawartego w tym słupie. Masa atmosfery jest zatem równa

$$M \approx \frac{F}{g} 4\pi R^2.$$

A więc liczba cząsteczek wynosi

$$N = \frac{M}{\mu} N_A = \frac{4\pi R^2 p_0}{\mu g} N_A \approx 10^{44},$$

gdzie  $N_A$  jest liczbą Avogadry.



**Rozwiązanie zadania F 410.** Wrzenie polega na tworzeniu się pęcherzyków pary wewnątrz cieczy, gdy ciśnienie pary nasyconej staje się równe ciśnieniu cieczy na tej głębokości, na której znajduje się pęcherzyk pary. Na granicy rozdziału cieczy pęcherzyki zawierają zarówno pary  $H_2O$ , jak i  $CCl_4$ . Ciśnienie pary w pęcherzykach jest równe sumie ciśnień parcjalnych par obu cieczy (prawo Daltona). Dlatego ciśnienie równe atmosferycznemu wytworzy się na granicy obu cieczy w temperaturze mniejszej od  $76,7^\circ C$ . (Ciśnienie hydrostatyczne cienkiej warstwy wody jest zanedbywalnie małe w porównaniu z atmosferycznym). W temperaturze  $65,5^\circ C$  ciśnienie nasyconej pary wodnej wynosi 192 mm Hg, a ciśnienie pary nasyconej czterochloru węgla wynosi 568 mm Hg, co razem daje 760 mm Hg (ciśnienie atmosferyczne).



**Rozwiązanie zadania M 746.** Ponieważ  $x_1 = 1995^{1995} \leq (10^4)^{2000} = 10^{8000}$ , to  $x_2 = S(x_1) \leq 8000 \cdot 9 = 72000$ . Zatem,  $x_3 \leq 5 \cdot 9 = 45$ ,  $x_4 \leq 3 + 9 = 12$  i wreszcie  $x_5 \leq 9$ . Mamy też, oczywiście,  $x_5 \geq 1$ .

Ponadto, liczby  $m$  i  $S(m)$  dają równe reszty z dzielenia przez 9. Liczba 1995 jest podzielna przez 3, zatem  $x_1$  dzieli się bez reszty przez 9, a więc dla dowolnego  $n$  liczba  $x_n$  także dzieli się przez 9. Stąd  $x_5 = 9$ . Wszystkie dalsze wyrazy ciągu  $(x_n)$  też są równe 9.

za pomocą całek dostajemy

$$x_0 y_0 \leq \int_0^{x_0} x^{p-1} dx + \int_0^{y_0} y^{q-1} dy,$$

co po scałkowaniu daje nierówność (1) z  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ .

Udowodnimy teraz nierówność (11). Dla prostoty zapisu wprowadźmy oznaczenie

$$\|f\|_p = \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Jeśli  $\|f\|_p \neq 0$  i  $\|g\|_q \neq 0$ , to korzystając z nierówności Younga mamy

$$(14) \quad \int_I \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} dx \leq \int_I \left( \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \right) dx = 1,$$

co jest innym zapisem nierówności (11). Jeśli prawa strona nierówności (11) jest równa zero, to lewa strona także jest zerem. To kończy dowód nierówności Höldera.

Przejdźmy do dowodu nierówności (12). Korzystając z nierówności Höldera (11) mamy

$$(15) \quad \begin{aligned} \int_I |f(x) + g(x)|^p dx &= \\ &= \int_I |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_I |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \\ &\leq \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p), \end{aligned}$$

i po podzieleniu obu stron nierówności przez  $\|f + g\|_p^{p-1}$  dostajemy nierówność (12).

W nierównościach Höldera i Minkowskiego dla całek można dobrać funkcje  $f$  i  $g$  oraz zbiór, po którym całkujemy w taki sposób, aby dostać nierówności dla sum: (6), (9) oraz (7), (10).

Pierwsze dwie nierówności otrzymujemy zakładając, że np.  $I$  jest przedziałem  $(0, n]$ , a funkcje  $f$  i  $g$  są funkcjami schodkowymi:

$$f(x) = a_i, \quad g(x) = b_i \quad \text{dla } x \in (i-1, i], \quad 1 \leq i \leq n, \quad (a_i, b_i \geq 0).$$

Nierówności dla sum nieskończonych otrzymujemy bezpośrednio z odpowiednich nierówności dla sum skończonych, w granicy, gdy z  $n$  zbiegamy do nieskończoności. Zauważmy, że postępując w ten sposób nie otrzymamy w (9) i (10) nierówności ostrych, wychodząc z nierówności ostrych w (6) i (7).

Chcąc zbadać warunki, przy których w (9) i (10) zachodzą nierówności ostre, możemy np. zbadać te warunki dla nierówności całkowych (11) i (12), a potem wyrazić je w języku ciągów.

Stosując nasze główne twierdzenie o nierówności (1) do nierówności (14) widzimy bez trudu, że w nierówności Höldera dla całek zachodzi nierówność ostra, jeśli tylko  $c_1 f^p \neq c_2 g^q$  dla każdego dwu stałych  $c_1, c_2$ , z których przynajmniej jedna jest różna od zera. Dla  $p = q = 2$ , w przypadku nierówności (5), warunek ten sprowadza się do warunku orzekającego, że wektory  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, \dots, b_n)$  nie są równoległe.

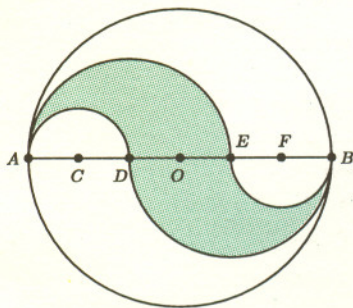
Korzystając z warunku, przy którego spełnieniu w (11) zachodzi nierówność ostra i patrząc na nierówność w (15) widzimy, że w nierówności Minkowskiego dla całek mamy nierówność ostrą, jeśli tylko  $c_1 f \neq c_2 g$  dla każdego dwu stałych  $c_1, c_2$ , gdy przynajmniej jedna jest różna od zera. W przypadku nierówności trójkąta (8) nierówność ostra ma przejrzystą interpretację geometryczną.

Gdy już mówimy o geometrii, prosimy podać elementarny dowód geometryczny nierówności (4), z wynikającym z niego warunkiem na nierówność ostrą (por. dowód 3) nierówności Younga.





**Rozwiązanie zadania M 744.** Dzielimy średnicę  $AB$  tego koła na sześć równych części punktami  $C, D, O, E, F$ . Półokręgi o średnicach  $AD, AE, BE$  i  $BD$  (patrz rysunek) dzielą koło w żądany sposób.



**Rozwiązanie zadania M 745.**  
Z dwumianu Newtona mamy

$$(x+y)^k = x^k + y^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j}$$

Każdy z iloczynów  $x^j y^{k-j}$  szacujemy wykorzystując nierówność Younga z wykładnikami  $p = k/j, q = k/(k-j)$ . Daje to w efekcie nierówność

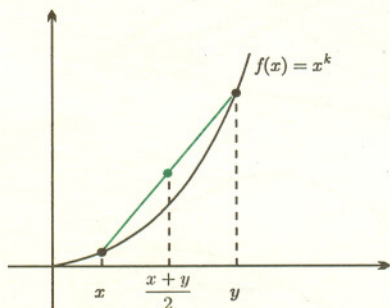
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j} &\leq \\ &\leq x^k \sum_{j=1}^k \frac{j}{k} \binom{k}{j} + y^k \sum_{j=1}^k \frac{k-j}{k} \binom{k}{j} \end{aligned}$$

Ponieważ  $\frac{j}{k} \binom{k}{j} = \binom{k-1}{j-1}$  oraz  $\binom{k}{j} = \binom{k-j}{k-j}$ , każda z sum po prawej stronie jest równa

$$\binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} + \dots + \binom{k-1}{k-2} = 2^{k-1} - 1$$

Stąd już od razu wynika teza zadania.

**Uwaga.** Uważny Czytelnik spostrzegł zapewne, że nierówność z tezy zadania pociąga za sobą wypukłość funkcji potęgowej i ma prostą interpretację graficzną (patrz rysunek).



Środek odcinka siecznej leży nad wykresem funkcji  $f(x) = x^k$  - dla funkcji ciągłej ta własność jest równoważna wypukłości.

Na zakończenie artykułu omówimy krótko przedstawione trzy dowody nierówności Younga. Czytelnik mógłby zadać w tym miejscu uzasadnione pytanie, dlaczego podano aż trzy dowody, podczas gdy zupełnie wystarczyłby jeden z nich. Niepełna odpowiedź na takie pytanie zawiera się w stwierdzeniu, że wszystkie trzy dowody są krótkie, proste i geometryczne w tym sensie, że można je zobaczyć na rysunku i łatwo zapamiętać, że podobają się autorowi i dlatego zostały przedstawione.

Oczywiście, jeden dowód wystarczyłby dla wykazania prawdziwości nierówności (1). Można jednak spytać, który z przedstawionych dowodów miałby być tym wybranym i dlaczego. Ktoś może też powiedzieć, że zna inny dowód, lepszy od każdego z przedstawionych powyżej. Dochodzimy tu do zagadnienia kryteriów, według których można porównywać i oceniać różne dowody tego samego twierdzenia. Mogą to być kryteria różnej natury, od bardzo subiektywnych (np. estetyczne czy filozoficzne), do całkiem obiektywnych, gdy rozważamy zalety danego dowodu patrząc np. na potencjalnie ogólne metody lub na analogie i powiązania z innymi teoriami matematycznymi, jakich jest nośnikiem.

Może ktoś kiedyś napisze na łamach *Delty* artykuł o kryteriach wartościujących dowody w matematyce...

Po tych uwagach ogólnych przejdźmy do krótkiego omówienia przedstawionych trzech dowodów nierówności Younga. Jak już wspomnieliśmy, zaletą każdego z nich jest krótkość, prostota i obrazowość.

Zaletą pierwszego dowodu jest możliwość jego prostego i płodnego uogólnienia: wykorzystując nierówność Jensena dla funkcji wypukłych

$$f(q_1 x_1 + \dots + q_n x_n) \leq q_1 f(x_1) + \dots + q_n f(x_n), \quad (q_i > 0, q_1 + \dots + q_n = 1),$$

będącą konsekwencją nierówności (13), dostajemy następujące uogólnienie nierówności (2)

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n} \leq q_1 a_1 + \dots + q_n a_n, \quad (a_i > 0, q_i \geq 0, q_1 + \dots + q_n = 1)$$

i, w szczególności, nierówność o średnich, arytmetycznej i geometrycznej, dla  $n$  składników

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

W drugim z podanych dowodów nierówności (1) korzystamy ze wzoru na równanie stycznej do krzywej gładkiej, które najłatwiej jest znaleźć używając pojęcia pochodnej funkcji, należącego do analizy matematycznej. Dla wielu Czytelników, być może, ten dowód jest najbardziej naturalny.

Dowód trzeciej nierówności Younga prowadzi bezpośrednio do innego ważnego uogólnienia tej nierówności. Jeśli zamiast funkcji  $y = x^{p-1}, p > 1$ , weźmiemy dowolną funkcję  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , ciągłą, ściśle monotoniczną i taką, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$  i  $f(0) = 0$ , to dla  $x, y \geq 0$  zachodzi nierówność (znana także jako nierówność Younga)

$$xy \leq \int_0^x f(u) du + \int_0^y f^{-1}(v) dv,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy  $y = f(x)$ .

**Uwagi:**

(1) Znaczne pogłębienie i rozszerzenie rozważań zawartych w tym artykule można znaleźć w klasycznej monografii: G.H. Hardy, J.E. Littlewood i G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

(2) Bardzo ciekawym artykułem przedstawiającym kryteria, których spełnienia można żądać od dowodów matematycznych, jest „Bolzano’s Analytic Programme”, autor: V.H. Parshall, *Mathematical Intelligencer*, vol. 14, no. 3, 1992, str. 45-53.