Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 187 (WT=2,46) i 188 (WT=1,56) z numeru 11/1994

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	44,44
Tomasz Wietecha	– Tarnów	44,35
Aleksander Surma	– Myszków	26,98
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	25,09
Przemysław Gworys	– Częstochowa	17,64
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	15,91

Gratulacje dla p. Andrzeja Nowogrodzkiego, który uzupełnia liczbę członków **Klubu 44F** do dwudziestu – tym gorętsze, że od poprzedniej takiej okazji upłynęło sporo czasu (przypomnijmy, że był to p. Leszek Motyka z Krakowa). Pan Tomasz Wietecha zaliczył natomiast drugie okrążenie.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1995

Przypominamy treść zadań:

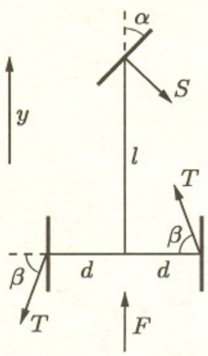
195. Tylne koła trójkołowego rowerka dziecinnego są osadzone na wspólnej osi, więc gdy rowerek skręca, co najmniej jedno z nich musi się ślizgać po podłożu. Jaką siłą F trzeba działać na taki rowerek, aby ruszył z miejsca?

Dane: Wzajemna odległość tylnych kół $2d$; odległość osi kierownicy (przyjmijmy dla uproszczenia, że jest pionowa) od tylnej osi l; szukana siła jest skierowana wzdłuż tego odcinka, a środek masy znajduje się w jego połowie; kąt skręcenia przedniego koła α; masa rowerka m; jednakowy współczynnik tarcia statycznego i kinetycznego kół o podłoże μ.

196. Objaśnić, dlaczego zwykła żarówka oświetleniowa nie nadaje się do wykorzystania w rzutnikach i reflektorach. Dlaczego żarówki do rzutników są zasilane niższym napięciem niż żarówki oświetleniowe tej samej mocy?

195. Istnieją dwie możliwości ruchu rowerka: 1) przednie koło toczy się bez poślizgu, a ślizgają się tylne (jak wykażemy, muszą się wtedy ślizgać oba), 2) ślizga się koło przednie, a oba tylne się toczą. W przypadku 1) na ślizgające się koło działa siła tarcia kinetycznego $T = \frac{1}{4}\mu mg$ (gdyż ciężar rozkłada się po połowie na przednie koło i tylną oś, czyli na każde z tylnych kół przypada 1/4). Gdyby ślizgało się tylko jedno z tylnych kół, kierunek poślizgu, a więc i kierunek siły tarcia dla tego koła byłby równoległy do siły F (dalej oznaczymy tę oś jako y). Ze względu na połączenie obu kół tę samą wartość musiałaby mieć równoległa składowa T_y siły tarcia statycznego działającej na drugie tylne koło. Jednak na to drugie koło działa także siła prostopadła równoważąca odpowiednią składową siły S działającej na przednie koło (rys.) – zatem całkowita siła tarcia byłaby większa od T. Ponieważ założyliśmy równość współczynników tarcia statycznego i kinetycznego, taka sytuacja jest niemożliwa i musi nastąpić poślizg obu kół. Obie siły tarcia T będą jednakowe, a ponadto – jak poprzednio – jednakowe (z przeciwnym zwrotem) są składowe T_y, czyli jednakowe są też i drugie składowe, a także kąty kierunkowe β. Aby wyznaczyć wartość β, przyjmijmy, że podczas powolnego poślizgu siły spełniają warunki takie, jak w stanie równowagi. Suma momentów sił jest więc równa zeru, a obliczając ją względem osi przedniego koła stwierdzamy, że proste zawierające obie omawiane siły T przechodzą przez tę oś, czyli $\operatorname{tg}\beta = l/d$. Dalej z warunku $2T\cos\beta = S\cos\alpha$ łatwo już znajdujemy S, a szukana siła F jest równa

$$F = S\sin\alpha = 2T\cos\beta\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\mu mg\frac{d}{\sqrt{d^2+l^2}}\operatorname{tg}\alpha\,.$$



Powyższy dowód obowiązuje wtedy, gdy przednie koło nie ślizga się, tzn. $S \le 2T$ (obciążenie jest tu podwójne), czyli $\alpha \le \beta$. W przypadku $\alpha \ge \beta$ mamy do czynienia ze wspomnianym na początku przypadkiem 2). Współrzędne y sił tarcia statycznego działających na tylne koła są tu – jak poprzednio – przeciwne, a $S = 2T$, więc

$$F = S\sin\alpha = \frac{1}{2}\mu mg\sin\alpha\,.$$

196. Prawidłowe działanie rzutników i reflektorów wymaga wytworzenia silnie skupionej wiązki światła, co można osiągnąć tylko wtedy, gdy dysponujemy bardzo małym (idealnie – punktowym) źródłem. Włókno żarówki do rzutnika musi więc mieć niewielkie rozmiary, czyli małą długość. Grubość włókna jest zapewne podobna do grubości włókna żarówki oświetleniowej lub większa (jeśli założymy tę samą temperaturę, to przy ustalonej mocy wypromieniowanej ustalona jest powierzchnia włókna). Opór elektryczny takiego drutu jest więc mały – stąd niższe napięcie zasilania, a większe natężenie prądu.

$\otimes\sqrt{\sum\!\!\!\!\!\int\,!}=44$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1995

Przypominamy treść zadań:

297. Czy istnieje permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_{250})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 250\}$ o tej własności, że dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, 249\}$ suma $x_1 + \ldots + x_k$ dzieli się przez x_{k+1}?

298. Dowieść, że dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ z przedziału $\langle -1\,;\,1\rangle$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \ge \left| \prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \right|.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 287 (WT=1,60) i 288 (WT=2,87)
z numeru 10/1994

Waldemar Pompe	– Warszawa	43,89
Mirosław Matlęga	– Skoczów	43,59
Adam Czornik	– Bytom	36,62
Janusz Olszewski	– Suwałki	33,80
Tomasz Wietecha	– Tarnów	33,68

297. Przykład takiej permutacji:

$$x_1 = 250, \quad x_{250} = 1, \quad x_{2i} = i + 1, \quad x_{2i+1} = i + 125 \quad (\text{dla } i = 1, \ldots, 124).$$

Ma ona wymaganą własność:

Dla $k = 1$ suma $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j = x_1 = 250$ dzieli się przez $x_{k+1} = x_2 = 2$.

Dla k parzystego ($k = 2m$, $1 \le m \le 124$):

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = x_1 + \sum_{i=1}^{m} x_{2i} + \sum_{i=1}^{m-1} x_{2i+1} = 250 + \sum_{i=1}^{m}(i+1) + \sum_{i=1}^{m-1}(i+125) =$$
$$= m^2 + 126m + 125 = (m+1)(m+125) = x_{2m}x_{2m+1} = x_k x_{k+1}\,.$$

Dla k nieparzystego ($k = 2m+1$, $1 \le m \le 124$):

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{2m} x_j + x_{2m+1} = (m+1)(m+125) + (m+125) =$$
$$= (m+125)(m+2) = \begin{cases} x_{2m+1}x_{2m+2} = x_k x_{k+1} & \text{gdy } m \le 123, \\ x_{249}x_3 = x_k x_3 & \text{gdy } m = 124. \end{cases}$$

W każdym przypadku rozważana suma dzieli się przez x_{k+1}.

298. Dla $n = 1$ mamy równość. Ustalmy $n \ge 2$; przyjmijmy indukcyjnie, że teza jest słuszna dla dowolnych dwóch ciągów długości $n-1$, o wyrazach z przedziału $\langle -1\,;\,1\rangle$, i weźmy pod uwagę dwa takie ciągi długości n: $a_1, \ldots, a_n$ oraz $b_1, \ldots, b_n$. Oznaczając

$$A = \prod_{i=1}^{n-1} a_i\,, \qquad B = \prod_{i=1}^{n-1} b_i$$

mamy z założenia indukcyjnego:

$$|A - B| \le \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - b_i|. \tag{1}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} |Aa_n - Bb_n| &= \tfrac{1}{2}|(A-B)(a_n+b_n) + (A+B)(a_n-b_n)| \le \\ &\le \tfrac{1}{2}|A-B|\cdot|a_n+b_n| + \tfrac{1}{2}|A+B|\cdot|a_n-b_n| \le \\ &\le |A-B| + |a_n - b_n| \end{aligned} \tag{2}$$

(bo $|a_n + b_n| \le 2$, $|A+B| \le 2$). Dodając stronami (1) i (2) otrzymujemy nierówność

$$|Aa_n - Bb_n| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|,$$

czyli tezę indukcyjną.

Dowodzona nierówność zachodzi więc dla ciągów dowolnej długości n, na mocy zasady indukcji.

„Kołowacizna kwadratu”

Jedno ze słynnych zagadnień Starożytności, tzw. kwadratura koła, polega na *wyznaczeniu boku kwadratu, tak aby jego pole było równe polu danego koła.* Od 1882 roku wiadomo (P. Lindemann), że problemu tego nie można rozwiązać przy wyłącznym użyciu cyrkla i linijki (choć można to zrobić, na przykład, za pomocą *kwadratrysy*, jak uczynił to Dinostratos w IV w.p.n.e.). Konstrukcyjnie (tzn. przy wyłącznym użyciu cyrkla i linijki) potrafimy wskazać jedynie przybliżone rozwiązania tego problemu.

Bliźniaczy problem – *wyznaczenie promienia koła, aby jego pole było równe polu danego kwadratu* – ma wyjątkowo proste przybliżone rozwiązanie konstrukcyjne.

Weźmy kwadrat jednostkowy i podzielmy jego przekątną na 5 równych części. Koło, którego promień ma długość dwóch takich części, ma pole równe 1,005309... Dokładność tej konstrukcji można teoretycznie zwiększać. Gdy przekątną kwadratu podzielimy na 1000 równych części, to pole koła o promieniu równym długości 399 takich części wynosi 1,000289...

Jarosław GÓRNICKI