Na granicy prawa

Jan GAJ

Postępowanie na granicy prawa zyskało sobie w ostatnich latach w naszym kraju wielką popularność, co jest niewątpliwym postępem, gdyż jeszcze kilka lat temu granica ta, w odróżnieniu od granic państwowych, nie była zbyt starannie strzeżona i nikt zbyt poważnie prawa nie traktował. Domyślasz się jednak, Czytelniku, że nie będziemy się zajmowali działalnością polityków i prawem karnym ani cywilnym. Chodzi mi, oczywiście, o prawa fizyki. Często słyszymy ostrzeżenia, żeby stosując te prawa pilnie zważać, czy założenia, przy których je sformułowano, są spełnione. Zaniedbanie tej ostrożności prowadzi bowiem do przykrych konsekwencji w postaci fałszywych wniosków, jak na przykład stwierdzenie, że prawdopodobieństwo zajmowania stanu podstawowego przez atom wodoru jest równe zeru (zob. *Delta* 10/1987). Zagadnienie to ma jednak drugą, bardzo interesującą stronę. Otóż, niektóre prawa fizyki czy – w skromniejszym wymiarze – modele teoretyczne obowiązują zaskakująco daleko od zakresu, w którym obowiązywać powinny. Żeby nie być gołosłownym, chciałbym dziś zaproponować Ci, Czytelniku, przyjrzenie się z bliska jednemu z takich przypadków. Dotyczy on jednego z podstawowych praw fizyki statystycznej, jakim jest

rozkład kanoniczny.

Zacznijmy od założeń. Rozkład kanoniczny wyraża prawdopodobieństwo zajęcia określonego stanu przez układ fizyczny przy założeniu, że układ ten jest słabo sprzężony z termostatem, czyli dużym układem pozostającym w równowadze termodynamicznej. Na przykład, gdyby układem była kulka przywiązana sprężynką do ciężkiego obiektu (termostatu) i energia układu (energia kinetyczna kulki) byłaby porównywalna z energią oddziaływania układ-termostat (energia potencjalna sprężynki), to założenie stosowalności rozkładu kanonicznego nie byłoby spełnione. Rozkład kanoniczny można wyrazić wzorem

$$P_\alpha = A\mathrm{e}^{-E_\alpha/kT}, \tag{1}$$

gdzie P_α jest prawdopodobieństwem tego, że układ znajdzie się w stanie α, E_α jest energią tego stanu, A jest stałą, $\mathrm{e} = 2,71\ldots$ jest podstawą logarytmów naturalnych, $\mathrm{k} \approx 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmanna, a T – temperaturą (w skali Kelvina). Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo tego, że układ zajmie jakiś stan, jest proporcjonalne do liczby e podniesionej do pewnej potęgi. Wykładnik tej potęgi jest ujemny, wprost proporcjonalny do energii rozważanego stanu i odwrotnie proporcjonalny do temperatury. Układ fizyczny, dla którego formułujemy to prawo, może być dowolny, aby tylko był dobrze wyodrębniony i spełniał wymienione na wstępie założenie. Przejdźmy teraz do następnego kroku, którym będzie

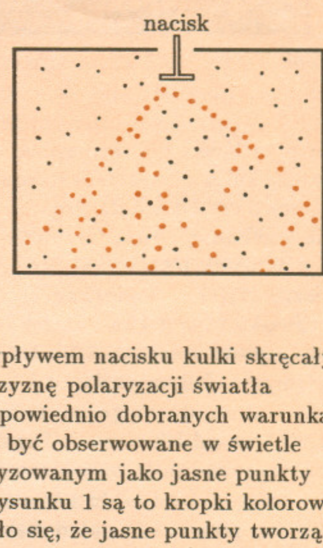
bezprawne zastosowanie rozkładu kanonicznego.

Zastosujemy go do zjawiska parowania wody. Model, w którym spróbujemy opisać to zjawisko, jest następujący. Naszym układem fizycznym będzie cząsteczka wody. Może ona przebywać w cieczy lub w części naczynia nad cieczą, wypełnionej parą nasyconą. Energia cząsteczki zależy tylko od tego, czy znajduje się ona w cieczy czy w parze, a różnica między jej wartościami dla obu tych stanów to po prostu ciepło parowania przypadające na jedną cząsteczkę.

Rozchodzenie się dźwięku w materiałach sypkich

Maria MASSALSKA-ARODŹ

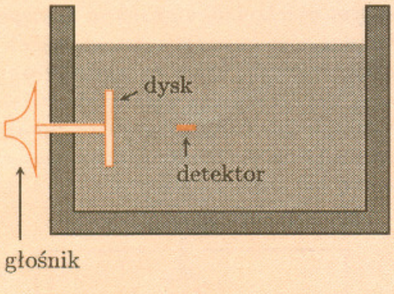
W poprzednim artykule na temat materiałów sypkich (patrz *Delta* 2/1995) zwróciłam uwagę na fakt, że przy opisie stanu skupienia, w jakim znajduje się układ sypki, bardzo istotną wielkością jest parametr geometrycznego upakowania u, czyli ułamek wypełnienia objętości próbki przez ziarna. Może on przyjmować różne wartości w zależności od warunków, w jakich umieścimy analizowaną próbkę. Ciekawy był fakt, że układ tracił swoją mechaniczną stabilność i zaczynał przejawiać cechy typowe dla stanu ciekłego, jeśli parametr upakowania był mniejszy niż wartość $u_{\min} = 0{,}52$ (przepraszamy za błąd w *Delcie* 2/1995). Okazuje się jednak, że problem upakowania ziaren w układzie sypkim jest bardziej złożony. Szczegółowa analiza rozłożenia ziaren piasku pozwala stwierdzić, że nie są to układy o jednorodnym upakowaniu. Aby się o tym przekonać, wykonano następujące doświadczenie: kuleczki o własnościach elastooptycznych, które na nacisk reagują zmianą współczynnika załamania światła, wsypano do płaskiego naczynia i poddano ściskaniu (tłok ma średnicę znacznie mniejszą niż średnica naczynia – rys. 1).



Rys. 1

Pod wpływem nacisku kulki skręcały płaszczyznę polaryzacji światła i w odpowiednio dobranych warunkach mogły być obserwowane w świetle spolaryzowanym jako jasne punkty – na rysunku 1 są to kropki kolorowe. Okazało się, że jasne punkty tworzą ciągłą, bardzo złożoną sieć wypełniającą całe naczynie. A więc wywierany na układ nacisk był przenoszony nie przez wszystkie kulki, ale przez sieć bardzo gęsto upakowanych kulek, które tworzyły w układzie konstrukcję nośną. Pod łukami, lub w przypadku trójwymiarowym – pod sklepieniami takiej konstrukcji istnieją obszary bardzo luźno upakowanych ziaren, które w ogóle nie doznają nacisku. Jest to zachowanie odmienne od obserwowanego przy ściskaniu próbek ciekłych, jak i stałych. Okazuje się, że również w swobodnej masie piasku, nie poddanej naciskowi, mamy do czynienia z podobną architekturą, która powstaje samoistnie. Takie sklepienia z gęsto upakowanych ziaren, pod którymi znajdują się obszary o ziarnach luźno upakowanych, zapewniają układowi sypkiemu stabilność mechaniczną.

Rozłożenie ziaren w materiałach sypkich jest zatem niejednorodne, co oznacza, że uporządkowanie ich nie jest całkowicie przypadkowe. Obecność konstrukcji nośnych o bardzo złożonej, hierarchicznej budowie pozwala wytłumaczyć zaskakujące zachowanie się dźwięku, jakie stwierdzono w doświadczeniu przeprowadzonym niedawno na uniwersytecie w Chicago [1]. W naczyniu wypełnionym szklanymi kulkami (o średnicy 0,5 cm) umieszczono aluminiowy dysk (o średnicy 7 cm) połączony sztywnym prętem z głośnikiem (rys. 2).



Rys. 2

Detektor o wielkości porównywalnej z rozmiarem kulek został umieszczony w odległości 6 cm od źródła drgań. Mierzoną wielkością było przyspieszenie detektora. Głośnik wykonywał drgania harmoniczne $A_s(t) = A_s \sin(2\pi\nu_0 t)$ o częstotliwości $\nu_0 = 4$ kHz i stałej amplitudzie przyspieszenia $A_s = 1{,}4$ g (g $= 9{,}81$ m/s^2). Tak więc siła, z jaką głośnik działał na otaczające go kulki, była niewiele większa od ich ciężaru. Drgania, które w otoczeniu źródła były sinusoidalne, w pewnej odległości od niego przestały być regularne, pomimo że układ starannie odizolowano od otoczenia. Drgania rejestrowane przez detektor można opisać wzorem: $A(t) = A_d(t)\sin(2\pi\nu_0 t + \phi(t))$. Jego amplitudę przedstawia rysunek 3.

Podstawowe założenie, które w oczywisty sposób nie jest tu spełnione, to słabość sprzężenia między cząsteczką a termostatem, którym, oczywiście, będzie całe naczynie z wodą. Przecież parowanie polega na wyrywaniu cząsteczki z zasięgu sił utrzymujących ją w kontakcie z innymi cząsteczkami cieczy, trudno więc mówić o słabym sprzężeniu w takiej sytuacji. Zlekceważmy jednak to nie spełnione założenie i spróbujmy doświadczalnie sprawdzić stosowalność w tym przypadku rozkładu kanonicznego. Miarą prawdopodobieństwa znajdowania się cząsteczki w określonym stanie jest liczba cząsteczek na jednostkę objętości (ściślej mówiąc – będzie to gęstość prawdopodobieństwa na jednostkę objętości), do której jest proporcjonalna gęstość cieczy lub pary: $\varrho = CP$. Logarytmując obustronnie wzór (1), reprezentujący rozkład kanoniczny, otrzymujemy

$$\ln\varrho_c = \ln C + \ln A - \frac{E_c}{kT}$$

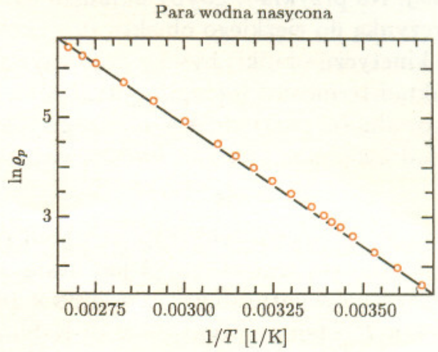
oraz

$$\ln\varrho_p = \ln C + \ln A - \frac{E_p}{kT}$$

odpowiednio dla cieczy i pary. Jeżeli teraz odejmiemy te równości stronami, to otrzymamy po prostym przekształceniu

$$\ln\varrho_p = \ln\varrho_c - \frac{E_p - E_c}{kT}\,.$$

A więc przedstawiając na wykresie logarytm gęstości pary nasyconej wody w zależności od odwrotności temperatury powinniśmy otrzymać prostą o nachyleniu $-(E_p - E_c)/\mathrm{k}$. Poniższy rysunek przedstawia taką zależność na podstawie danych zaczerpniętych z książki H. Szydłowskiego *Pomiary fizyczne* (PWN, Warszawa 1977).



$\ln\varrho_p = -4902\frac{1}{T} + 19{,}6$; maksymalne odchylenie 0,0442.

Widać, że punkty doświadczalne pięknie układają się w prostą. A więc postać zależności zgadza się z przewidywaną przez rozkład kanoniczny. A co z wartością nachylenia? Nachylenie prostej znalezione metodą najmniejszych kwadratów wynosi 4902 K. Obliczmy je używając znanej wartości ciepła parowania wody $Q = 2260$ J/g, jej masy molowej $m = 18$ g oraz liczby cząsteczek w molu $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$.

$$\frac{E_p - E_c}{\mathrm{k}} = \frac{\frac{Qm}{N_A}}{\mathrm{k}} = \frac{Qm}{\mathrm{k}N_A} = \frac{2260\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}}\right]\cdot 18\ [\mathrm{g}]}{1{,}38\times 10^{-23}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right]\cdot 6{,}02\times 10^{23}} = 4910\ [\mathrm{K}]\,.$$

A więc doświadczenie potwierdza ze zdumiewającą dokładnością przewidywanie oparte na fałszywym założeniu! W tym miejscu żaden miłośnik logiki nie wytrzyma dłużej i zawoła

ależ to wszystko bzdura!

Na podstawie fałszywego założenia mogę udowodnić wszystko, a więc powyższy wynik o niczym nie świadczy! Taka postawa, niezbędna na przykład w matematyce, jest, niestety, nie do utrzymania w fizyce, w której nigdy niczego nie wiemy z całkowitą pewnością. Jedyną dostępną fizykowi metodą sprawdzania słuszności swoich teorii jest wysnuwanie z nich wniosków, które dadzą się bezpośrednio skonfrontować z doświadczeniem. Właśnie to przed chwilą zrobiliśmy. Zamiast więc biadać nad nędzą logiczną metod działania fizyków, spróbujmy zastanowić się, dlaczego uzyskaliśmy tak dokładną zgodność z doświadczeniem teorii, która nie ma prawa się stosować. Pozostawiam Cię, Czytelniku, z tym problemem i zapraszam do listownych komentarzy. Najlepsze nagrodzimy książkami.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 741. Wykazać, że jeśli istnieje ograniczony podzbiór A przestrzeni $\mathbf{R}^n$ o średnicy 1, który nie da się podzielić na n części o średnicy mniejszej od 1, to istnieje również ograniczony podzbiór wypukły B przestrzeni $\mathbf{R}^n$ o tej samej własności. (Por. artykuł *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* na str. 5).
Rozwiązanie na str. 7

M 742. Znaleźć choć jedną liczbę $n > 1$ o tej własności, że pewnego zbioru w $\mathbf{R}^n$ o średnicy równej 1 nie można rozłożyć na mniej niż n^2 części o średnicy mniejszej od 1. (Por. artykuł *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* na str. 5).
Rozwiązanie na str. 7

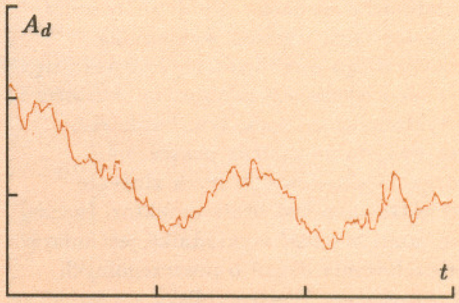
Zadania nr 741 i 742 zaproponowała Danuta KOŁODZIEJCZYK

M 743. W artykule Jarosława Górnickiego *Kilka słów o powierzchniach* (str. 10) opisana jest wstęga Möbiusa. Czy można z niej wyciąć torus? A czy z torusa można wyciąć wstęgę Möbiusa?
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Adam KOROCIŃSKI

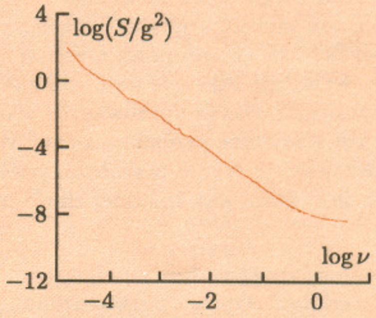
F 407. Jeśli żelazny pręt o długości 1 m ogrzejemy od 0°C do 300°C, to zgodnie ze znanym wzorem na rozszerzalność termiczną ciał $L = L_0(1 + \alpha \cdot \delta T)$ stwierdzimy, że długość pręta powinna wzrosnąć do $L_{300} = 1{,}0039$ m ($\alpha_{\mathrm{Fe}} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}(°\mathrm{C})^{-1}$ dla tego zakresu temperatur). Z kolei, jeśli ochłodzimy go z powrotem do temperatury początkowej, to na podstawie tego samego wzoru – z ujemną zmianą temperatury oraz $L_0' = L_{300}$ – przewidujemy, że długość pręta w temperaturze 0°C wyniesie 0,9999848... m!
Wyjaśnić, co jest źródłem powyższego „paradoksu".
Rozwiązanie na str. 16

F 408. Dysponując gumą do skoków na uwięzi chcemy, aby skoczek o masie 40 kg obciążony workiem z piaskiem o masie 10 kg zanurzył się po skoku „do pasa" (wysokość jego środka ciężkości) w rzece. Jak długą gumę należy zastosować, jeśli lustro rzeki znajduje się 20 m poniżej poziomu, z którego startuje skoczek i na którym przymocowana jest guma? Na jaką wysokość wzniesie się skoczek, jeśli upuści on worek w dolnym położeniu? Jakie będzie maksymalne przyspieszenie, którego doświadczy skoczek?
Zakładamy, że do gumy stosuje się prawo Hooke'a, iloczyn modułu Younga i przekroju poprzecznego gumy jest stały i wynosi 500 N, oraz że uprząż utrzymuje skoczka głową do góry. Przyjmujemy $g = 10$ m/s^2 oraz zaniedbujemy opory ruchu.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 3

W przypadku substancji w stanie stałym lub ciekłym zarejestrowane drgania byłyby drganiami harmonicznymi o tej samej częstotliwości, a jedynie mniejszej amplitudzie. W przypadku materiałów sypkich jest całkiem inaczej. Zmiany amplitudy drgań obserwowane w trakcie upływu czasu mają charakter bardzo chaotyczny, co sugeruje, że sygnał odbierany przez detektor jest superpozycją wielu drgań harmonicznych o różnych częstotliwościach i amplitudach. Aby się o tym przekonać, wygodnie jest przedstawić otrzymane wyniki w nieco innej postaci.



Rys. 4

Rysunek 4 pokazuje tak zwane widmo mocy w skali podwójnie logarytmicznej. Widmo mocy jest zdefiniowane jako kwadrat modułu transformaty Fouriera amplitudy drgań

$$S(\nu) = \left|\int A_d(t)\exp(-2\pi\nu t)\,dt\right|^2.$$

Zależność $\log S(\nu)$ od $\log \nu$ jest wyraźnie liniowa w szerokim zakresie częstotliwości, od 10^{-5} Hz do 1 Hz. Oznacza ona, że $S(\nu) \sim \nu^{-2}$. Jest to zachowanie niezwykłe. Oznacza ono, że drgania detektora (czyli w przybliżeniu drgania każdego z ziaren) obserwowane na rysunku 3 jako sygnał chaotyczny podobny do szumu) są złożeniem drgań o wszystkich częstotliwościach z zakresu ponad 5 dekad, których amplitudy cechuje pewna regularność. Istotną informację niesie wartość wykładnika potęgi oszacowanego z nachylenia prostej z rysunku 4. Dla tzw. białego szumu, będącego złożeniem sygnałów o przypadkowych częstościach, wartość wykładnika potęgowego jest równa zeru. Uważa się, że im większe jest odstępstwo wartości wykładnika od zera, tym bardziej są wzajemnie zależne poszczególne drgania składowe, których złożenie rejestrowane jest przez detektor. Inaczej mówiąc, wartość wykładnika jest miarą skorelowania drgań o poszczególnych częstościach. Wartość bliska -2 świadczy o silnym skorelowaniu. Wydaje się to związane z faktem, że propagacja słabej fali dźwiękowej jest bardzo czuła na wzajemny kontakt poszczególnych ziaren. Drgania źródła nie są przenoszone przez luźno upakowane, drgające niezależnie ziarna. Przeciwnie, w transmisji sygnału akustycznego przede wszystkim uczestniczy jako całość sieć ciasno upakowanych ziaren. Wychylenie jednego ziarna jest odczuwane nie tylko przez jego bezpośrednich sąsiadów, ale przez wszystkie ziarna tworzące sieć. Zaskakujące jest, że pod wpływem drgań o amplitudzie tak małej (odpowiadająca im amplituda wychyleń źródła wynosi zaledwie 200 Å) obserwowane są silne fluktuacje $A_d(t)$ o wielkości tego rzędu co średnia amplituda samego sygnału. Transmisja słabej fali dźwiękowej przez materiał sypki wywołuje zapewne dość znaczne odkształcenia ciasno upakowanych ziaren oraz ich wzajemne przemieszczenia. Można wnioskować, że sygnał przenoszony jest przez sieć, która jest w każdej chwili nieco inna.

Niejednorodność rozłożenia ziaren w materiałach sypkich potwierdzono również w innym doświadczeniu, które Chu-heng Liu oraz Sidney Nagel [1] przeprowadzili dla takiego samego jak przedstawiony wcześniej, układu szklanych kulek. Tym razem zamiast drgania o ustalonej częstości, źródło dźwięku wytwarzało bardzo słaby sygnał, ale w formie widma $A_s(\nu)$. (Oznacza to, że drgania źródła składały się z wielu drgań harmonicznych o częstotliwościach ν i amplitudach $A_s(\nu)$.) Wielkością, którą analizowano, był iloraz $\eta(\nu) = A_d(\nu)/A_s(\nu)$, gdzie $A_d(\nu)$ było amplitudą sygnału wywołanego w badanym układzie przez amplitudę drgań źródła $A_s(\nu)$ źródła. Rysunek 5a pokazuje dwie bardzo nieregularne krzywe $\eta(\nu)$ zarejestrowane w dwóch różnych chwilach (aby ułatwić porównanie, są one przesunięte względem siebie wzdłuż skali pionowej). Tym razem zaskakująca jest niezwykła powtarzalność wszystkich szczegółów zależności $\eta(\nu)$ w kolejnych pomiarach. Równocześnie, gdy

Tekst ten jest kontynuacją dyskusji z numeru 250 *Delty* (3/1995). Przypominamy pytania przedstawione przez redakcję z prośbą o ustosunkowanie się do problematyki w nich zawartej.

1. Jaką korzyść może odnieść ktoś zajmujący się np. hodowlą karpi lub malarstwem abstrakcyjnym ze znajomości małego twierdzenia Fermata, reguły Oersteda czy stałej Hubble'a ?

2. Skoro byle kalkulator liczy szybciej i lepiej od człowieka, to po co uczyć człowieka liczenia ?

3. Nie ma na świecie gazu doskonałego, próżni, prostokąta ani liczby e itd. Czemu więc z takim uporem o takich właśnie obiektach idealnych mówią wszystkie nauki ścisłe ?

4. Fizyka – znaczy to po grecku *rzeczy widzialne, rzeczy naturalne, zjawiska przyrody*. Czemu nazwa ta uznawana jest dziś za trafną dla nauki o obiektach będących wytworami ludzkiego umysłu, jakimi są w szczególności cząstki elementarne i pola ?

5. O lotach kosmicznych marzyli przed laty wszyscy. Dlaczego, gdy pierwsi ludzie wylądowali na Księżycu, sprawy podróży pozaziemskich przestały – praktycznie wszystkich – obchodzić ?

6. Dlaczego *w dobrym tonie* jest chwalić się szkolnymi niepowodzeniami w nauce matematyki czy fizyki, a nie wypada przyznawać się do niewydolności w humanistyce ?

7. Czemu zawdzięcza w chwili obecnej paranauka swoją przewagę nad nauką ?

Szanowny Panie Redaktorze

Dziękuję za list wraz z ankietą z dnia 15 IX 1994 i przepraszam, że odpowiadam w ostatniej chwili, a może nawet już po niej. Niestety, nawał obowiązków...

Oto moje odpowiedzi na pytania ankiety:

1. Nie sądzę, aby hodowca karpi odniósł szczególną korzyść **akurat** ze znajomości stałej Hubble'a. Uważam natomiast, że dobre wykształcenie ogólne przynosi korzyść każdemu, bo ćwiczy umysł, poszerza horyzonty myślenia i wyrabia nawyk pracy intelektualnej, która potrzebna jest dziś w każdym zawodzie. A co do samej stałej Hubble'a, to uważam, że dla nie-fizyka ważniejsze jest wiedzieć, że wiek Wszechświata daje się w ogóle jakoś oszacować, niż znać wielkość tego oszacowania.

2. Są dwa powody. Pierwszy wyjaśniłem powyżej. Drugi jest bardziej przyziemny. Kalkulator liczy rzeczywiście szybciej, gdy w grę wchodzą duże liczby i gdy zaniedbujemy czas dostępu do kalkulatora. Przy małych liczbach zawodnik rachujący w pamięci wygrywa z przeciwnikiem, który musi sięgać po kalkulator i wpalcowywać dane.

3. Nauki ścisłe koncentrują się na wyjaśnianiu **istoty rzeczy**, a poszukiwanie istoty rzeczy to właśnie odrzucanie tego, co mniej ważne, na korzyść tego, co decyduje o własnościach badanego przedmiotu. Istotą małych trójkątów jest znana własność sumy ich kątów: w granicach błędu każdego pomiaru równa się ona 180 stopni. Jednak dla trójkątów kosmicznych ta własność przestaje opisywać istotę rzeczy i wtedy trzeba sięgnąć po geometrię Łobaczewskiego.

4. Czy rzeczywiście ktoś zastanawia się dziś nad literalną trafnością nazwy „fizyka"? Jest to po prostu nazwa historyczna powszechnie przyjęta i tyle!

5. Sądzę, że sprawy podróży pozaziemskich obchodzą dziś znacznie więcej ludzi i w znacznie większym stopniu niż kiedyś. Policzmy choćby tę armię naukowców, techników, managerów, urzędników, polityków i prawników, którzy zajmują się lotami kosmicznymi zawodowo. A to, że prasa niedzielna mniej się tymi podróżami interesuje, to tylko dowód, że przeniosły się one ze świata fantazji do codziennej rzeczywistości.

6. Wiedza humanistyczna potrzebna jest wszędzie tam, gdzie człowiek spotyka się z człowiekiem. Dla przykładu, kto nie potrafi sprawnie posługiwać się ojczystym językiem, ten jest ułomny w każdej sytuacji i w każdym zawodzie. A człowiek nie znający matematyki w wielu sytuacjach może radzić sobie całkiem nieźle.

7. A czy rzeczywiście ma taką przewagę? Chyba tylko w niedzielnej prasie.

Andrzej BLIKLE

Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty

Danuta KOŁODZIEJCZYK

W 1992 roku środowisko matematyczne obiegła sensacyjna wiadomość, że po 60 latach został rozstrzygnięty negatywnie przez Jeffa Kahna z USA i Gila Kalaia z Izraela słynny Problem Borsuka o Podziale:

Czy każdy ograniczony podzbiór przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej można podzielić na $n+1$ części, z których każda ma średnicę mniejszą niż wyjściowy zbiór?

Profesor Karol Borsuk (1905–1982) był jednym z najwybitniejszych matematyków polskich okresu przed i powojennego, twórcą nowych gałęzi topologii (teorii retraktów, teorii kształtu, teorii grup kohomotopii). Jego idee oraz bogactwo i głębokość problemów, które stawiał, stanowią inspirację do badań w Polsce i za granicą od wielu lat.

Wyjaśnijmy bliżej pojęcia występujące w sformułowaniu tego pytania.

Średnicą zbioru nazywamy kres górny odległości par punktów należących do zbioru. I tak, koło o promieniu $1/2$ ma średnicę 1, trójkąt równoboczny o boku 1 ma średnicę 1, natomiast kwadrat o boku 1 ma średnicę $\sqrt{2}$.

Przestrzenie euklidesowe wymiaru 1, 2 i 3 to prosta, płaszczyzna i przestrzeń, w której żyjemy. Punkty na prostej można opisać przy użyciu jednej liczby (oś liczbowa), a na płaszczyźnie i w przestrzeni za pomocą dwóch i trzech liczb, czyli w 2- i 3-wymiarowych układach współrzędnych. To podsunęło pomysł, by zdefiniować n-wymiarową przestrzeń euklidesową, oznaczaną też przez $\mathbf{R}^n$. Punkty tej przestrzeni opisujemy za pomocą układów n liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, czyli w n-wymiarowym układzie współrzędnych.

W przestrzeni $\mathbf{R}^n$ odległość między punktami $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ oblicza się analogicznie jak w przestrzeni dwu- i trójwymiarowej:

$$\rho(a,b) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \cdots + (a_n-b_n)^2}\,.$$

Podobnie, jak w niższych wymiarach, można też zdefiniować wiele pojęć geometrycznych. Na przykład sfera $S^{n-1}(x,r)$ o środku x i promieniu r to zbiór punktów w $\mathbf{R}^n$, których odległość od punktu x jest równa r. Sfera $S^{n-1}(x,r)$ ma, oczywiście, średnicę $2r$.

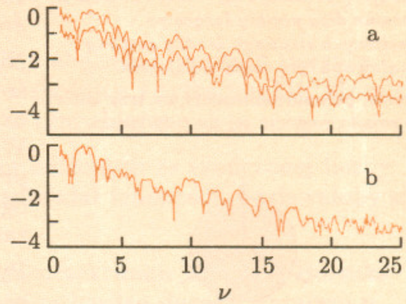
Indeks $n-1$ w oznaczeniu sfery bierze się stąd, że ma ona o jeden wymiar mniej niż przestrzeń – widać to dobrze na płaszczyźnie (okrąg) i w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozważmy czworościan foremny o krawędzi 1. Jego średnica jest równa 1. Zauważmy, że nie można go rozbić na trzy części o średnicach mniejszych od 1 (dwa wierzchołki musiałyby należeć do jednej z nich). Można jednak, co jest widoczne, rozbić go na cztery takie części.

Istnieje n-wymiarowy odpowiednik czworościanu – tzw. n-wymiarowy sympleks (dla $n=2$ jest to po prostu trójkąt). Definiujemy go jako uwypuklenie zbioru $n+1$ punktów przestrzeni, które nie leżą w żadnej wspólnej przestrzeni niższego wymiaru. Podobnie jak czworościan, każdy n-wymiarowy sympleks „foremny” o krawędzi 1 da się rozbić na $n+1$ części o mniejszych średnicach, ale na n części już nie. Okazuje się, że tak samo jest ze sferami i kulami w przestrzeni n-wymiarowej.

Uwypuklenie zbioru B to najmniejszy zbiór wypukły, który zawiera B.

nieznacznie zaburzono upakowanie ziaren, wówczas szczegóły widma $\eta(\nu)$ uległy zasadniczym zmianom, jak to pokazuje rysunek 5b.



Rys. 5

Cechą wspólną pozostaje chaotyczny charakter obserwowanych zależności $\eta(\nu)$. Pomimo to w tym doświadczeniu nie możemy, jak poprzednio, mówić o szumie, który stwierdzamy wówczas, gdy obserwacje z różnych chwil różnią się, chociaż warunki eksperymentu nie ulegają zmianie. Tym razem bez wątpienia została zarejestrowana odpowiedź układu na widmo $A_s(\nu)$ źródła, charakterystyczna dla konkretnego przestrzennego rozłożenia wszystkich ziaren w naczyniu. Można ją sprawdzić powtarzając eksperyment w tych samych warunkach. (W doświadczeniu wykluczono możliwość obserwowania rezonansowych wzbudzeń od naczynia.) Trudno byłoby wyjaśnić zaobserwowane zjawisko przyjmując jednorodne rozłożenie ziaren w próbce. Natomiast dla sieci ciasno upakowanych ziaren można sobie wyobrazić, że w przestrzeni między detektorem a źródłem znajdzie się na pewno wiele rozgałęzień sieci o coraz drobniejszych odnogach, którymi przenoszony jest sygnał. Nieregularne zmiany zależności transmisji $\eta(\nu)$ od częstości mogą być wywołane interferencją tych sygnałów cząstkowych.

Zachowanie się dźwięku w układach składających się z ziaren pokazuje, że są to układy niejednorodne, których własności zależą wyraźnie od tego, w jakim miejscu próbki je badamy. Dla układów sypkich nie obowiązuje proporcjonalność między wielkością wprowadzonego do układu zaburzenia a efektem, który ono wywołuje, nawet wówczas, gdy zaburzenie jest bardzo małe. Są to układy nieliniowe, co ilustrują opisane doświadczenia. Wydaje się intrygujące pytanie, jakie będzie zachowanie układu sypkiego, gdy poddamy go działaniu drgań o dużej amplitudzie, znacznie większej niż stosowane dotychczas.

[1] Chu-heng Liu i S.R. Nagel, *Physical Review Letters*, vol. 68, No 15, 2301 (1992).