Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty

Danuta KOŁODZIEJCZYK

W 1992 roku środowisko matematyczne obiegła sensacyjna wiadomość, że po 60 latach został rozstrzygnięty negatywnie przez Jeffa Kahna z USA i Gila Kalaia z Izraela słynny Problem Borsuka o Podziale:

Czy każdy ograniczony podzbiór przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej można podzielić na $n+1$ części, z których każda ma średnicę mniejszą niż wyjściowy zbiór?

Profesor Karol Borsuk (1905–1982) był jednym z najwybitniejszych matematyków polskich okresu przed i powojennego, twórcą nowych gałęzi topologii (teorii retraktów, teorii kształtu, teorii grup kohomotopii). Jego idee oraz bogactwo i głębokość problemów, które stawiał, stanowią inspirację do badań w Polsce i za granicą od wielu lat.

Wyjaśnijmy bliżej pojęcia występujące w sformułowaniu tego pytania.

Średnicą zbioru nazywamy kres górny odległości par punktów należących do zbioru. I tak, koło o promieniu 1/2 ma średnicę 1, trójkąt równoboczny o boku 1 ma średnicę 1, natomiast kwadrat o boku 1 ma średnicę $\sqrt{2}$.

Przestrzenie euklidesowe wymiaru 1, 2 i 3 to prosta, płaszczyzna i przestrzeń, w której żyjemy. Punkty na prostej można opisać przy użyciu jednej liczby (oś liczbowa), a na płaszczyźnie i w przestrzeni za pomocą dwóch i trzech liczb, czyli w 2- i 3-wymiarowych układach współrzędnych. To podsunęło pomysł, by zdefiniować n-wymiarową przestrzeń euklidesową, oznaczaną też przez $\mathbf{R}^n$. Punkty tej przestrzeni opisujemy za pomocą układów n liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, czyli w n-wymiarowym układzie współrzędnych.

W przestrzeni $\mathbf{R}^n$ odległość między punktami $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ oblicza się analogicznie jak w przestrzeni dwu- i trójwymiarowej:

$$\rho(a,b) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \cdots + (a_n-b_n)^2}\,.$$

Podobnie, jak w niższych wymiarach, można też zdefiniować wiele pojęć geometrycznych. Na przykład sfera $S^{n-1}(x,r)$ o środku x i promieniu r to zbiór punktów w $\mathbf{R}^n$, których odległość od punktu x jest równa r. Sfera $S^{n-1}(x,r)$ ma, oczywiście, średnicę $2r$.

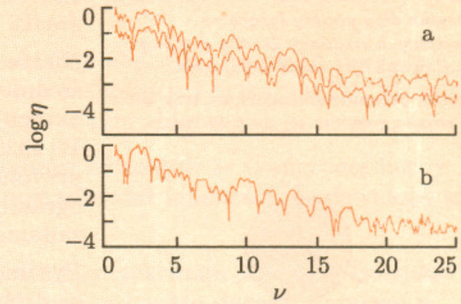
Indeks $n-1$ w oznaczeniu sfery bierze się stąd, że ma ona o jeden wymiar mniej niż przestrzeń – widać to dobrze na płaszczyźnie (okrąg) i w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozważmy czworościan foremny o krawędzi 1. Jego średnica jest równa 1. Zauważmy, że nie można go rozbić na trzy części o średnicach mniejszych od 1 (dwa wierzchołki musiałyby należeć do jednej z nich). Można jednak, co jest widoczne, rozbić go na cztery takie części.

Istnieje n-wymiarowy odpowiednik czworościanu – tzw. n-wymiarowy sympleks (dla $n=2$ jest to po prostu trójkąt). Definiujemy go jako uwypuklenie zbioru $n+1$ punktów przestrzeni, które nie leżą w żadnej wspólnej przestrzeni niższego wymiaru. Podobnie jak czworościan, każdy n-wymiarowy sympleks „foremny" o krawędzi 1 da się rozbić na $n+1$ części o mniejszych średnicach, ale na n części już nie. Okazuje się, że tak samo jest ze sferami i kulami w przestrzeni n-wymiarowej.

Uwypuklenie zbioru B to najmniejszy zbiór wypukły, który zawiera B.

nieznacznie zaburzono upakowanie ziaren, wówczas szczegóły widma $\eta(\nu)$ uległy zasadniczym zmianom, jak to pokazuje rysunek 5b.



Rys. 5

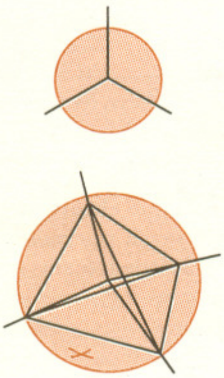
Cechą wspólną pozostaje chaotyczny charakter obserwowanych zależności $\eta(\nu)$. Pomimo to w tym doświadczeniu nie możemy, jak poprzednio, mówić o szumie, który stwierdzamy wówczas, gdy obserwacje z różnych chwil różnią się, chociaż warunki eksperymentu nie ulegają zmianie. Tym razem bez wątpienia została zarejestrowana odpowiedź układu na widmo $A_s(\nu)$ źródła, charakterystyczna dla konkretnego przestrzennego rozłożenia wszystkich ziaren w naczyniu. Można ją sprawdzić powtarzając eksperyment w tych samych warunkach. (W doświadczeniu wykluczono możliwość obserwowania rezonansowych wzbudzeń od naczynia.) Trudno byłoby wyjaśnić zaobserwowane zjawisko przyjmując jednorodne rozłożenie ziaren w próbce. Natomiast dla sieci ciasno upakowanych ziaren można sobie wyobrazić, że w przestrzeni między detektorem a źródłem znajdzie się na pewno wiele rozgałęzień sieci o coraz drobniejszych odnogach, którymi przenoszony jest sygnał. Nieregularne zmiany zależności transmisji $\eta(\nu)$ od częstości mogą być wywołane interferencją tych sygnałów cząstkowych.

Zachowanie się dźwięku w układach składających się z ziaren pokazuje, że są to układy niejednorodne, których własności zależą wyraźnie od tego, w jakim miejscu próbki je badamy. Dla układów sypkich nie obowiązuje proporcjonalność między wielkością wprowadzonego do układu zaburzenia a efektem, który ono wywołuje, nawet wówczas, gdy zaburzenie jest bardzo małe. Są to układy nieliniowe, co ilustrują opisane doświadczenia. Wydaje się intrygujące pytanie, jakie będzie zachowanie układu sypkiego, gdy poddamy go działaniu drgań o dużej amplitudzie, znacznie większej niż stosowane dotychczas.

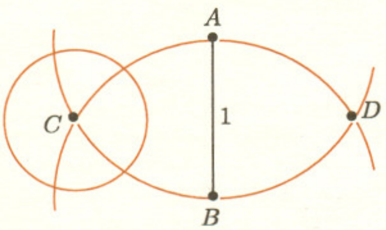
[1] Chu-heng Liu i S.R. Nagel, *Physical Review Letters*, vol. 68, No 15, 2301 (1992).

W przypadku „zwykłej" sfery dwuwymiarowej w przestrzeni trójwymiarowej Twierdzenie o Antypodach można obrazowo sformułować jak następuje: *Jeśli sferę pomalujemy trzema kolorami, to pewne dwa punkty leżące po przeciwnych stronach środka zostaną zamalowane tym samym kolorem.*

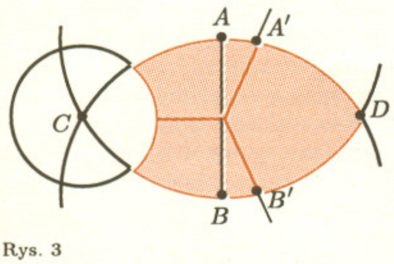
Istotnie, pomalowanie sfery na trzy kolory odpowiada rozbiciu jej na trzy części.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

To, że sfery S^n nie można podzielić na n części o mniejszej średnicy, nie jest już jednak tak proste. Dokładniej, ten fakt jest treścią słynnego Twierdzenia Borsuka o Antypodach, które mówi, że:

Jeśli sferę $(n-1)$-wymiarową rozbijemy na n części, to co najmniej jedna z nich zawiera parę punktów antypodycznych (tj. punktów symetrycznych względem środka sfery, inaczej mówiąc: dwóch końców tej samej średnicy).

Nietrudno wykazać, że o ile sfera w $\mathbf{R}^n$ nie da się rozbić na n części o mniejszej średnicy, to można ją łatwo rozbić na $n+1$ takich części (w przypadku okręgu i sfery 2-wymiarowej, patrz rys. 1 przedstawiający rozbicie koła i kuli). W 1933 roku, publikując Twierdzenie o Antypodach, Karol Borsuk wysunął przypuszczenie, znane odtąd jako hipoteza Borsuka o Podziale, że dowolny, ograniczony podzbiór przestrzeni $\mathbf{R}^n$ ma również tę własność. Zauważmy (patrz zadanie **M 741**), że wystarczy zająć się przypadkiem figur wypukłych.

Pytanie, czy hipoteza ta jest prawdziwa, okazało się bardzo trudne. Mimo że problem prostotą sformułowania i nazwiskiem autora przyciągał wielu matematyków, przez długi czas pojawiały się jedynie częściowe rezultaty.

Pozytywna odpowiedź dla $n=2$ została od razu podana przez Borsuka, ale na taki sam wynik dla $n=3$ trzeba było czekać przeszło 20 lat. Opublikował go H.G. Eggleston w 1955 roku. Warto wspomnieć, że podobne rozwiązanie ogłosił polski matematyk J. Perkal na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego już w 1947 roku, ale nie złożył go do druku. W 1957 roku znacznie prostszy dowód prawdziwości hipotezy dla $n=3$ podali niezależnie B. Grünbaum i A. Heppes.

Metoda podziału *pokryw uniwersalnych*, tj. figur, w których można umieścić dowolny podzbiór $\mathbf{R}^n$ o średnicy 1 (na płaszczyźnie są nimi np. sześciokąt foremny o boku $\sqrt{3}/3$ i kwadrat o boku 1), stosowana z dobrym skutkiem w wymiarach niskich, raczej nie dawała nadziei na rozstrzygnięcie problemu w całej ogólności. Wydaje się jednak, iż powszechnie wierzono, że hipoteza jest prawdziwa, a od czasu do czasu (podobnie jak w przypadku Wielkiego Twierdzenia Fermata) ktoś utrzymywał, że potrafi ją udowodnić. Ale proponowane, a czasem nawet publikowane dowody okazywały się fałszywe.

W wymiarach wyższych od trzech znane więc były tylko pewne szczególne klasy figur, dla których udało się wykazać prawdziwość hipotezy.

Na uwagę zasługuje tu przede wszystkim dowód H. Hadwigera (1945) dla brył wypukłych o gładkim brzegu (nie będziemy precyzować, co to znaczy gładki brzeg, odwołując się do intuicji: kula i elipsoida mają gładki brzeg, natomiast wielościan nie ma gładkiego brzegu, jest „kanciasty").

Pojawiły się również drobne wzmocnienia tego wyniku dla pewnych zbiorów o niegładkim brzegu (1952, Anderson-Klee i inne), a A.S. Rissling udowodnił, że hipoteza jest prawdziwa dla brył wypukłych mających środek symetrii.

Autorka niniejszego artykułu wykazała to samo dla brył wypukłych o średnicy 1 w przestrzeni $\mathbf{R}^n$, które zawierają $(n-1)$-wymiarowy sympleks foremny o krawędzi 1.

W przypadku wymiaru 2 tym sympleksem jest po prostu odcinek o długości 1, a dowód powyższego faktu daje nam wówczas jeden z dowodów (być może najprostszy) hipotezy Borsuka dla $n=2$.

Weźmy mianowicie dowolny odcinek o długości 1, którego końce leżą na brzegu danej figury F o średnicy 1. Końce te oznaczmy przez A i B. Łatwo spostrzec, że F musi się zawierać w części wspólnej dwóch kół o promieniach 1 i środkach w A i B (patrz rys. 2). Odległość punktów C i D jest większa niż 1, więc jeden z nich, powiedzmy C, na pewno nie należy do F. Jeśli więc narysujemy odpowiednio małe kółko wokół punktu C, to musi ono także być rozłączne z F. Wobec tego figura F jest zawarta w takiej „wygryzionej soczewce" jak na rysunku 3. Przesuwając teraz odrobinę punkty A i B po brzegu tej „soczewki" w kierunku punktu D otrzymamy punkty A' i B' oraz rozbicie soczewki na trzy części, z których każda ma średnicę mniejszą niż 1 (patrz rys. 3).

Znany rezultat H. W. E. Junga z 1901 roku mówi, że:

Każdą bryłę o średnicy 1 *w* $\mathbf{R}^n$ *można zawrzeć w pewnej kuli o promieniu* $r \le r_0 = \sqrt{n/(2n+2)}$ *(czyli kula o promieniu r_0 jest pokrywą uniwersalną w $\mathbf{R}^n$). Co więcej, jeśli dla danej bryły najmniejsze takie r jest równe dokładnie $\sqrt{n/(2n+2)}$, to zawiera ona wierzchołki pewnego n-wymiarowego sympleksu o krawędzi* 1.

Zestawiając ten fakt z tym, co powiedzieliśmy nieco wyżej, dorzucamy do wspomnianych już wyników trochę przewrotne stwierdzenie, że:

Każdą bryłę wypukłą o średnicy 1 *w* $\mathbf{R}^n$*, która nie mieści się w żadnej kuli* n*-wymiarowej o promieniu mniejszym od* $\sqrt{n/(2n+2)}$ *można podzielić na* $n+1$ *części o mniejszej średnicy.*

Nietrudno wykazać, że dla udowodnienia (lub obalenia) hipotezy Borsuka wystarcza rozważać zamiast całego zbioru o średnicy 1 tylko punkty, które są końcami odcinków o długości 1 zawartych w tym zbiorze.

Ale nawet „najprostszy" przypadek zbiorów złożonych ze skończonej liczby punktów lub równoważnie – wielościanów sprawiał trudności, wydawałoby się, nie do pokonania. Aż do roku 1992...

W roku 1992 Jeff Kahn i Gil Kalai obalili nieoczekiwanie hipotezę Borsuka wykazując, że istnieje zbiór, a nawet wielościan bardzo dużego wymiaru n (a więc również pewien skończony zbiór punktów w przestrzeni euklidesowej tego wymiaru), którego nie można podzielić na $n+1$ części o mniejszej średnicy.

Wykorzystując kombinatoryczne lematy Frankla i Wilsona oraz Larmana, o skończonych konfiguracjach punktów w $\mathbf{R}^n$, udowodnili oni, że *jeśli* $n = 4p^\alpha$*, gdzie* p *jest liczbą pierwszą, a* $\alpha \in \mathbf{N}$*, to najmniejsza liczba części o średnicy mniejszej od* 1*, na jaką można rozłożyć każdy zbiór o średnicy* 1 *w* $\mathbf{R}^n$*, jest nie mniejsza niż* $(1{,}1)^{\sqrt{n}}$.

Dla odpowiednio dużych n liczba $(1{,}1)^{\sqrt{n}}$ jest **znacznie** większa od $n+1$ (patrz też zadanie **M 742**).

Możliwość zastosowania metod kombinatorycznych do badań nad tym problemem została po raz pierwszy zasugerowana prawdopodobnie przez P. Erdősa, który użył ich do prostych dowodów hipotezy Borsuka dla skończonych zbiorów punktów w wymiarach 2 i 3. Jego podejście wydawało się jednak zbyt trudne do przeniesienia na wymiary wyższe.

Warto wspomnieć, że dwaj autorzy zaskakująco elementarnego, choć technicznie dość skomplikowanego, rozwiązania nie należeli do grona stałych amatorów hipotezy, nie byli nawet przedstawicielami tych dyscyplin matematyki, z którymi była ona zwykle wiązana (geometria i topologia). O problemie dowiedzieli się przypadkiem.

Entuzjastom hipotezy Borsuka o Podziale pozostało więc do rozstrzygnięcia, w jakim wymiarze przestaje ona być prawdziwa, w szczególności: jak wygląda sytuacja w najniższym nie zbadanym dotąd wymiarze 4.

W związku z klasyczną hipotezą Borsuka o Podziale powstało też wiele innych, otwartych dotąd problemów o podobnie prostych sformułowaniach. Zainteresowanym polecamy przeglądowy artykuł B. Grünbauma „Borsuk's problem and related questions", *Proc. Sympos. Pure Math.*, v. 7 (Convexity), Providence (USA), 1963, 271–284.

Rozwiązanie zadania M 741. Warunki tezy zadania spełnia np. zbiór B będący uwypukleniem A. Zauważmy najpierw, że średnica diam B zbioru B jest równa 1. W tym celu niech A_1 będzie sumą wszystkich odcinków o końcach w A, A_2 – sumą wszystkich odcinków o końcach w A_1, itd. Ogólnie, niech A_{k+1} będzie sumą wszystkich odcinków o końcach w A_k. Łatwo wykazać przez indukcję, że $\operatorname{diam} A_k = 1$ dla wszystkich k. Ponieważ $A_k \subset A_{k+1}$, to wynika stąd, że zbiór

$$C = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k$$

ma średnicę 1 i, oczywiście, jest wypukły. Ponieważ B jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym A, to mamy $A \subset B \subset C$, a zatem

$$1 = \operatorname{diam} A \le \operatorname{diam} B \le \operatorname{diam} C = 1 .$$

Gdyby zbiór B można było podzielić na n części $B_1, \ldots, B_n$ o średnicy mniejszej od 1, to zbiory $A_i = B_i \cap A$ stanowiłyby rozbicie A na n części o średnicy mniejszej od 1 – sprzeczność.

Uwaga: Czytelnik Wnikliwy zechce się zastanowić, czy istnieje takie n_0, że dla $k > n_0$ mamy $A_k = A_{n_0}$, i czy $B = C$.

Rozwiązanie zadania M 742. Zgodnie ze wspomnianym w artykule *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* rezultatem Kahna i Kalaia wystarczy np. znaleźć takie $k \in \mathbf{N}$, by dla $n = 4\cdot 2^{2k}$ mieć

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{n}} > n^2 .$$

Ponieważ $\sqrt{n} = 2^{k+1} \in \mathbf{N}$, to ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{n}} > \binom{\sqrt{n}}{5}\frac{1}{10^5} .$$

Nietrudno zauważyć, że dla $n \ge 64$, gdy $\sqrt{n} - 4 \ge \sqrt{n}/2$ prawa strona ostatniej nierówności jest większa od liczby

$$\frac{n^{5/2}}{16\cdot 5!\cdot 10^5} ,$$

która jest większa od n^2 dla $n > 2^8\cdot(5!)^2\cdot 10^{10}$, a więc tym bardziej dla $n \ge 2^8\cdot(128)^2\cdot(2^4)^{10} = 2^{62}$. Warunki zadania spełniają więc np. wszystkie liczby n postaci $4\cdot 2^{2k}$, gdzie k jest liczbą naturalną nie mniejszą od 30.

Uwaga. Można sprawdzić, że $(1{,}1)^{\sqrt{n}} > n+1$ już dla $n = 9162 \ll 2^{62}$.