Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1995

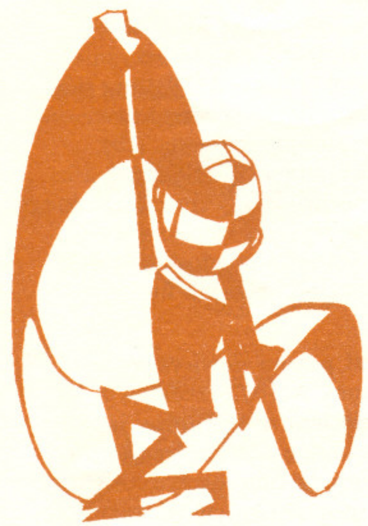
Przypominamy treść zadań:

193. Siły przypływowe działające na Ziemię ze strony Księżyca powodują stopniowe spowalnianie obrotu Ziemi (wydłużanie dnia). Gdy w odległej przyszłości obrót Ziemi zsynchronizuje się z obiegiem Księżyca, pływy ustaną. Ile będzie wtedy wynosiła jednakowa długość dnia i miesiąca, a ile – odległość Księżyca od Ziemi? Przyjąć, że moment bezwładności Ziemi jest równy 0,33 MR^2 (pamiętajmy, że Ziemia nie jest jednorodną kulą – średnia gęstość jądra jest większa niż płaszcza i skorupy). Pozostałe niezbędne dane wziąć z tablic. Pominąć siły pływowe działające ze strony Słońca.

194. Dwa mikrofony umieszczono we wzajemnej odległości 0,5 m. Nietoperz leci w kierunku równoległym do prostej, na której leżą mikrofony i w danej chwili znajduje się w odległości 10 m od każdego z nich. Stwierdzono, że częstotliwość „pisku" nietoperza wynosi 100 kHz, a łączny sygnał (otrzymany z dodania sygnałów odbieranych przez oba mikrofony) pulsuje z częstotliwością 50 Hz. Z jaką prędkością leci nietoperz? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 330 m/s.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 185 (WT=2,60) i 186 (WT=3,60) z numeru 10/1994

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	42,88
Tomasz Wietecha	– Tarnów	40,49
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	38,48
Aleksander Surma	– Myszków	25,58
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	21,23



193. Wprowadźmy oznaczenia: $T_m = 27{,}32$ d – okres obiegu Księżyca wokół Ziemi (miesiąc gwiazdowy), $T_d = 23$ h 56 min 4 s $= 0{,}9973$ d – okres obrotu Ziemi (doba gwiazdowa), T' – szukany wspólny okres, $\omega_m = 2\pi/T_m$, $\omega_d = 2\pi/T_d$, $\omega' = 2\pi/T'$, M_Z – masa Ziemi, M_K – masa Księżyca, $n = M_Z/M_K = 81{,}51$, $R = 384\,400$ km – średnia odległość Księżyca od Ziemi, R' – ta odległość po ustaniu pływów, $R_S = R\dfrac{1}{n+1}$ – odległość środka masy układu Ziemia-Księżyc od środka Ziemi, R_Z – promień Ziemi, $r_Z = R_Z/R = 0{,}01657$, R_K – promień Księżyca, $r_K = R_K/R = 0{,}0045$, $r' = R'/R$.

Zadanie sprowadza się do wykorzystania zasady zachowania momentu pędu. Początkowy moment pędu jest opisany wzorem

$$K = \omega_m(M_Z R_S^2 + M_K(R-R_S)^2 + 0{,}33 M_K R_K^2) + \omega_d \cdot 0{,}33 M_Z R_Z^2\,,$$

gdzie dla Księżyca przyjęliśmy ten sam współczynnik 0,33 w momencie bezwładności co dla Ziemi (praktycznie nie ma to znaczenia, gdyż ten składnik momentu pędu jest bardzo mały). Zauważmy, że Księżyc jest zwrócony do Ziemi stale tą samą stroną, czyli jego obrót wokół własnej osi jest zsynchronizowany z obiegiem wokół Ziemi. Jeśli tak będzie także w stanie końcowym (znów założenie bez istotnego znaczenia), to wzór końcowy ma postać

$$K = \omega'(M_Z R_S'^2 + 0{,}33 M_Z R_Z^2 + M_K(R'-R_S')^2 + 0{,}33 M_K R_K^2)\,.$$

Przekształcając tożsamość $K_{\text{pocz}} = K_{\text{końc}}$ dochodzimy do równania

$$\frac{1}{T_m}\left(1 + 0{,}33 r_K^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{T_d}\cdot 0{,}33 r_Z^2(n+1) = \frac{1}{T'}(r'^2 + 0{,}33(n+1)(r_Z^2 + r_K^2/n))\,,$$

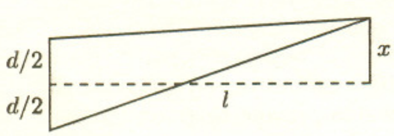
a po podstawieniu danych liczbowych

$$0{,}04410 = \frac{1}{T'}(r'^2 + 0{,}00748)\,.$$

Według trzeciego prawa Keplera $R^3/R'^3 = T_m^2/T'^2$, czyli $r'^2 = (T'/T_m)^{4/3} = 0{,}01215(T')^{4/3}$. Rozwiązując numerycznie równanie

$$0{,}04410 = 0{,}01215(T')^{1/3} + 0{,}00748(T')^{-1}$$

znajdujemy $T' = 47{,}3$ d, skąd $r' = 1{,}44$ (tyle razy zwiększy się promień orbity Księżyca). Istnieje też drugie rozwiązanie ($T' = 0{,}2024$ d, $r' = 0{,}038$), lecz wymagałoby ono dostarczenia energii do układu, podczas gdy pływy energię odbierają.



194. Sygnały odbierane przez mikrofony są przesunięte względem siebie w fazie, a różnica faz wynika z różnicy dróg od nietoperza do jednego i drugiego mikrofonu. Maksimum łącznego sygnału przypada wtedy, gdy różnica dróg jest całkowitą wielokrotnością długości fali λ. Jeśli oznaczymy odległość między mikrofonami przez d, odległość od nich do prostej, wzdłuż której leci nietoperz, przez l, a przesunięcie nietoperza przez x, to różnica dróg jest dana wyrażeniem (zob. rys.)

$$\sqrt{l^2 + (x+d/2)^2} - \sqrt{l^2 + (x-d/2)^2} \approx \frac{xd}{l}\,.$$

Długość fali jest równa $\lambda = \dfrac{330}{100}\left[\dfrac{\text{m/s}}{\text{kHz}}\right] = 3{,}3$ mm. Widzimy, że w ciągu 1/50 s nietoperz przelatuje odcinek $l\lambda/d = 66$ mm, zatem jego prędkość wynosi 3,3 m/s.

$\sqrt[\otimes]{\text{£}!} = 44$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1995

Przypominamy treść zadań:

295. Dana jest liczba naturalna n. Wyznaczyć najmniejszą liczbę m o następującej własności: z każdego m-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ można wybrać liczby a, b, dla których $n < a - b < 2n$.

296. Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P. Jego odległości od wierzchołków A, B, C równe są odpowiednio R_a, R_b, R_c, a od prostych BC, CA, AB – odpowiednio r_a, r_b, r_c. Dowieść, że

$$8(\sqrt{R_bR_c} + r_a)(\sqrt{R_cR_a} + r_b)(\sqrt{R_aR_b} + r_c) \leq 27 R_aR_bR_c\,.$$

Kiedy zachodzi równość?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 285 (WT=3,29) i 286 (WT=1,76) z numeru 9/1994

Krzysztof Jedziniak	– Katowice	44,82
Waldemar Pompe	– Warszawa	43,89
Mirosław Matlęga	– Skoczów	43,59
Adam Czornik	– Bytom	33,01

Piętnasty Weteran **Klubu 44 M**: pan Jedziniak!

295. Wykażemy, że najmniejszą liczbą o żądanej własności jest $n + 2$.

Niech M będzie dowolnym $(n+2)$-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 3n\}$. Jeśli c jest największą liczbą w tym zbiorze, to zwiększając wszystkie liczby ze zbioru M o jednakowy składnik $3n - c$ otrzymujemy $(n+2)$-elementowy zbiór M', zawarty w $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ i zawierający liczbę $3n$. Zbiór M zawiera taką parę liczb a, b, że $n < a - b < 2n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór M' zawiera taką parę. Zatem wystarczy ograniczyć uwagę do zbiorów $(n+2)$-elementowych, których największym elementem jest liczba $3n$. Niech M będzie takim zbiorem.

Jeżeli zbiór M zawiera co najmniej jedną liczbę b spełniającą nierówności $n < b < 2n$, to wystarczy przyjąć $a = 3n$: różnica $a - b$ jest wtedy większa od n, a mniejsza od $2n$.

Jeżeli zbiór M nie zawiera takiej liczby, to wówczas zbiór $M \setminus \{3n\}$ jest podzbiorem sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ zbiorów dwuelementowych

$$A_1 = \{1, 2n\}, \quad A_2 = \{2, 2n+1\}, \quad \ldots\,, \quad A_n = \{n, 3n-1\}.$$

Zbiór $M \setminus \{3n\}$ ma $n + 1$ elementów, więc jego część wspólna z co najmniej jednym zbiorem A_k jest zbiorem dwuelementowym. Oznaczając elementy zbioru A_k przez a i b mamy szukaną parę: $a - b = 2n - 1$.

Zatem liczba $n + 2$ ma własność, o którą chodzi. Liczba $n + 1$ tej własności już nie ma, bowiem $(n+1)$-elementowy zbiór $\{1, \ldots, n\} \cup \{3n\}$ nie zawiera pary liczb a, b, dla których $n < a - b < 2n$.

296. Niech Q będzie rzutem punktu P na prostą BC. Oznaczmy miary kątów BPC, CPA, APB, BPQ, CPQ odpowiednio przez 2α, 2β, 2γ, φ, ψ. Jeśli Q jest punktem odcinka BC, to $2\alpha = \varphi + \psi$, a jeśli Q leży poza tym odcinkiem, to $2\alpha = |\varphi - \psi|$. W każdym przypadku mamy nierówność

$$\frac{r_a}{\sqrt{R_bR_c}} = \sqrt{\frac{r_a}{R_b} \cdot \frac{r_a}{R_c}} = \sqrt{\cos\varphi \cdot \cos\psi} \leq$$
$$\leq \frac{\cos\varphi + \cos\psi}{2} = \cos\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2} \leq \cos\alpha\,,$$

i analogicznie

$$\frac{r_b}{\sqrt{R_cR_a}} \leq \cos\beta\,, \qquad \frac{r_c}{\sqrt{R_aR_b}} \leq \cos\gamma\,.$$

Ponieważ zaś $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ $(\alpha, \beta, \gamma < \pi/2)$, zatem z wklęsłości funkcji $\cos x$ w przedziale $(0; \pi/2)$ dostajemy oszacowanie

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \leq \cos\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

Wobec tego

$$\frac{(\sqrt{R_bR_c} + r_a)(\sqrt{R_cR_a} + r_b)(\sqrt{R_aR_b} + r_c)}{R_aR_bR_c}$$
$$= \Big(1 + \frac{r_a}{\sqrt{R_bR_c}}\Big)\Big(1 + \frac{r_b}{\sqrt{R_cR_a}}\Big)\Big(1 + \frac{r_c}{\sqrt{R_aR_b}}\Big) \leq$$
$$\leq (1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)(1 + \cos\gamma) \leq$$
$$\leq \left(\frac{3 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ oraz gdy w każdym z trójkątów BPC, CPA, APB wysokość poprowadzona z wierzchołka P jest jednocześnie dwusieczną odpowiedniego kąta – to znaczy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny, a punkt P jest jego środkiem ciężkości.

Rozwiązanie zadania M 743. Nie, ponieważ torus jest powierzchnią bez brzegu (tzn. otoczenie każdego punktu przypomina płaszczyznę). Jeśli przez pewien punkt wstęgi prowadzimy cięcie, to jego otoczenie nie przypomina płaszczyzny, tylko półpłaszczyznę (z brzegiem). Ogólnie: z powierzchni z brzegiem nie można wyciąć powierzchni bez brzegu.

Nie, ponieważ mrówka mogłaby przejść po wstędze Möbiusa z dowolnego punktu do tego samego punktu „po drugiej stronie" wstęgi, czyli z wnętrza torusa mogłaby wydostać się na zewnątrz, co jest niemożliwe. Ogólnie: z powierzchni orientowalnej (tj. dwustronnej) nie można wyciąć powierzchni nieorientowalnej (tj. jednostronnej); można natomiast z powierzchni jednostronnej wyciąć dwustronną, o czym każdy może się przekonać np. tnąc w poprzek wstęgę Möbiusa.