

# Kilka słów o powierzchniach

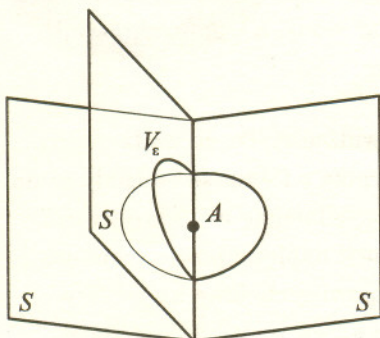
Jarosław GÓRNICKI

Czasem precyzyjne określenie (na gruncie matematyki) pozornie prostego pojęcia nastrocza wiele trudności. Tak jest, na przykład, w przypadku odpowiedzi na pytanie: co to jest krzywa? Przekonasz się o tym Czytelniku przeglądając książkę [5]. Podobnie kłopotliwe jest określenie powierzchni. Możemy o niej mówić, na przykład, z punktu widzenia geometrii, a szczególnie geometrii różniczkowej (patrz np. [2]) bądź z punktu widzenia topologii. Aby uniknąć tych trudności, w tym artykule poprzestaniemy na intuicyjnym rozumieniu terminu *powierzchnia*. Będzie to dla nas *twór dwuwymiarowy, ograniczony, który lokalnie przypomina płaszczyznę*, tzn. malutki człowieczek postawiony w dowolnym miejscu na tej powierzchni będzie miał wrażenie, że stoi na płaszczyźnie – podobnie nam się wydaje, że Ziemia jest płaska. Będziemy ponadto zakładać, że powierzchnia jest zbiorem domkniętym, tzn. wraz z ciągiem zbieżnym punktów zawiera jego granicę.

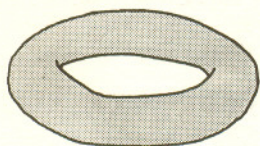
Przykładami powierzchni są więc: sfera, powierzchnia torusa (rys. 2), natomiast płaszczyzna (jako zbiór nieograniczony), sfera z usuniętym jednym punktem (gdyż nie jest domknięta), czy figura z rysunku 1 nie są powierzchniami.

Łatwo godzimy się z poglądem, że różnych powierzchni jest dużo. Czy można je w jakiś sposób klasyfikować?

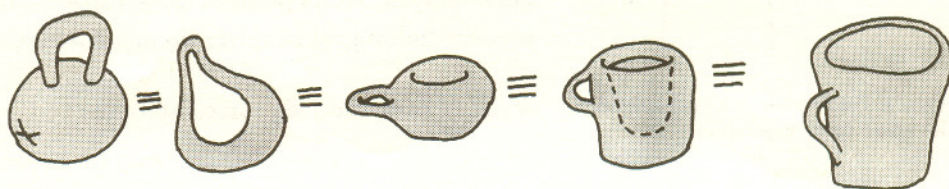
Popatrzmy na sferę i na torus. Intuicyjnie jest dla nas jasne, że wszystkie powierzchnie z rysunku 3 w jakimś sensie są powierzchniami tego samego typu co torus, natomiast sfera jest powierzchnią innego typu. Chciałoby się powiedzieć, że powierzchnie z rysunków 2 i 3 mają jedną „dziurę”, natomiast sfera dziury nie ma. Lecz co to znaczy, że torus ma dziurę? Jak ją matematycznie zdefiniować? Zamiast zajmować się ową definicją, wskażemy inną własność, która odróżnia sferę od wszystkich torusopodobnych powierzchni z rysunków 2 i 3.



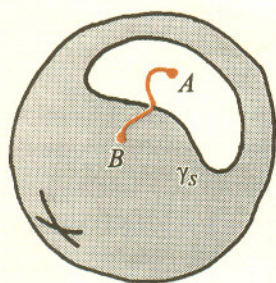
Rys. 1. Dowolne otoczenie  $V_\epsilon \cap S$  punktu  $A$  składa się z „trzech kawałków”, nie przypomina więc płaszczyzny.



Rys. 2. Torus

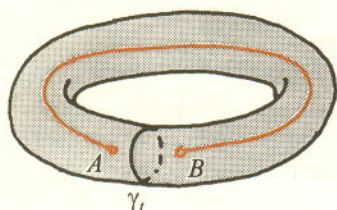


Rys. 3. Metamorfozy torusa otrzymane przez „rozciąganie”, „skurczenie”, „wyginanie”, ale bez „rozrywania” i „sklejeń”.



Rys. 4

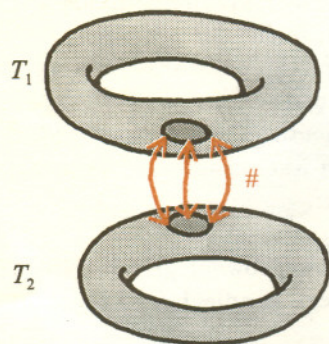
Narysujmy na sferze *dowolną* krzywą zamkniętą bez samoprzecięć  $\gamma_s$ . Wówczas zawsze znajdziemy dwa punkty  $A$  i  $B$  leżące na sferze poza krzywą  $\gamma_s$  i o tej własności, że każda krzywa łącząca  $A$  z  $B$  przecina krzywą  $\gamma_s$  (rys. 4). Powyższą własność możemy też *intuicyjnie* opisać tak: każda krzywa zamknięta i bez samoprzecięć, leżąca na sferze rozcina ją na osobne części.



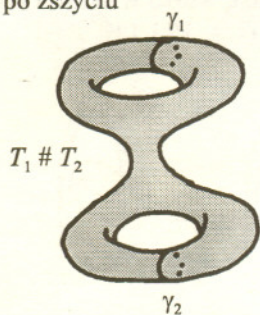
Rys. 5

Torus (i żadna torusopodobna powierzchnia z rysunku 3) takiej własności nie ma. Istotnie. Rozważmy krzywą  $\gamma_t$  taką, jak na rysunku 5. Wówczas dowolnie położone punkty  $A$  i  $B$  (leżące poza  $\gamma_t$ ) można połączyć krzywą nie przecinającą  $\gamma_t$ . Innymi słowy, krzywa  $\gamma_t$  nie rozcina torusa na osobne części. Odkryliśmy w ten sposób własność, za pomocą której możemy te powierzchnie odróżniać – klasyfikować. Aby to lepiej zobrazować, opiszemy teraz sposób tworzenia innych powierzchni. Zrobimy nową powierzchnię „sklejając” dwa torusy, a dokładniej – zdefiniujemy tzw. sumę spójną dwóch torusów  $T_1 \# T_2$ . Budujemy ją następująco: wycinamy w każdym z torusów koło (i wyrzucamy je), a następnie „zszywamy” oba torusy wzdłuż brzegów owych dziur (rys. 6).

a) zszywamy



b) po zszyciu



Rys. 6. Jeżeli  $T_1 \# T_2$  rozetniemy wzdłuż  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , to nie rozpadnie się.

„Doszywając” w podobny sposób kolejne torusy będziemy otrzymywali coraz to inne powierzchnie (rys. 7).

Umawiamy się przy tym, że:

rodzajem powierzchni nazywamy maksymalną liczbę zawartych w niej rozłącznych krzywych zamkniętych bez samoprzecięć i takich, że rozcięcie powierzchni wzdłuż tych krzywych nie powoduje jej rozpadu na osobne części.

Na przykład:

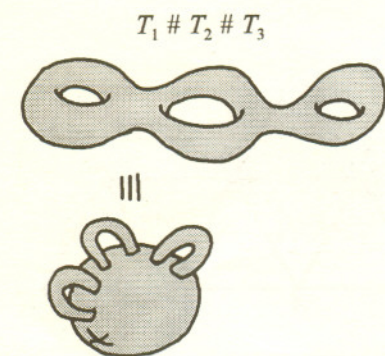
- sfera jest powierzchnią rodzaju 0,
- torus jest powierzchnią rodzaju 1,
- $T_1 \# T_2$  jest powierzchnią rodzaju 2 (rys. 6b),
- $T_1 \# T_2 \# T_3$  jest powierzchnią rodzaju 3 (rys. 7), itd.

Dokładniejsza analiza tego zjawiska – tym zajmuje się, między innymi, topologia – pokazuje, że powierzchnie różnego rodzaju nie można wzajemnie na siebie odwzorować w sposób ciągły i różnowartościowy.

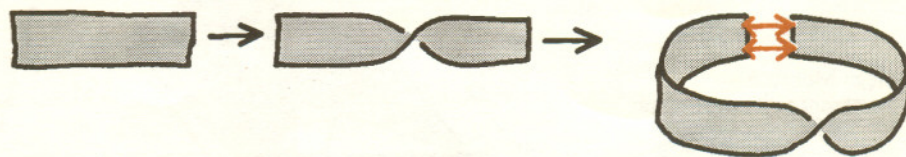
Do dalszych rozważań dopuścimy teraz dodatkowo tzw. *powierzchnie z brzegiem*, na przykład domknięte koło, prostokąt z brzegiem.

Wszystkie wymienione dotychczas przykłady powierzchni mają jedną wspólną cechę – na każdej z nich można wyróżnić dwie strony. Dwie strony takiej powierzchni można pomalować różnymi kolorami, aby je rozróżnić. Jeżeli powierzchnia jest zamknięta (tzn. bez brzegu), to kolory nigdzie się nie stykają. Jeżeli powierzchnia ma brzeg (np. prostokąt), to oba kolory stykają się tylko wzdłuż brzegu. Zatem – czy istnieją powierzchnie mające tylko jedną stronę? Tak. Przykłady takich powierzchni podali około 1858 roku, niezależnie, A.F. Möbius (1790–1868) i J.B. Listing (1808–1882). Model takiej jednostronnej powierzchni bardzo łatwo otrzymać. Bierzymy wąski pasek papieru, jeden jego koniec przekręcamy o  $180^\circ$  (w lewo lub w prawo) i skleamy z drugim.

Otrzymujemy w ten sposób figurę zwaną obecnie *wstęgą Möbiusa* (rys. 8 i 9).



Rys. 7



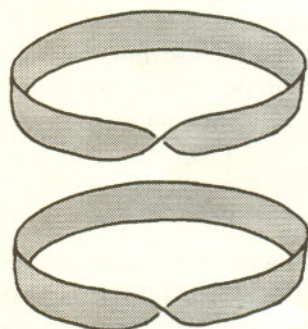
Rys. 8. Kolejne etapy tworzenia wstęgi Möbiusa.

Możemy, oczywiście, otrzymać dwie przeciwnie skręcone wstęgi Möbiusa i żadne wyginanie, rozciąganie bez rozrywania nie przeprowadzi jednej z tych powierzchni w drugą. Otrzymujemy w ten sposób dwie różne *powierzchnie jednostronne* – z każdego punktu wstęgi do dowolnego innego jej punktu można przejść bez przechodzenia przez brzeg.

Nadmieśmy w tym miejscu, że dla powierzchni bez brzegu rodzaj powierzchni plus informacja, czy jest ona jedno-, czy dwustronna, określa tę powierzchnię jednoznacznie z topologicznego punktu widzenia. Powierzchnie dwustronne rodzaju  $n \geq 0$  to

- dla  $n = 0$ : sfera,
- dla  $n \geq 1$  to suma spójna  $n$  torusów,

i innych dwustronnych powierzchni bez brzegu w topologii nie ma, to znaczy każda inna może być w sposób ciągły i różnowartościowy przekształcona na jedną z wyżej wymienionych.

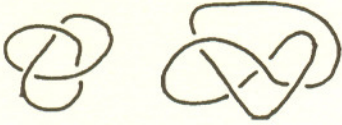


Rys. 9. Przeciwnie skierowanie wstęgi Möbiusa.

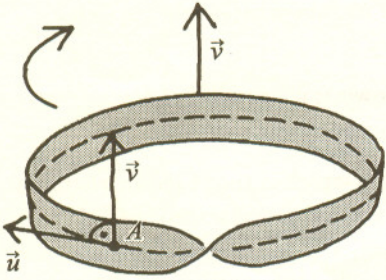
krzywe niezawężłone:



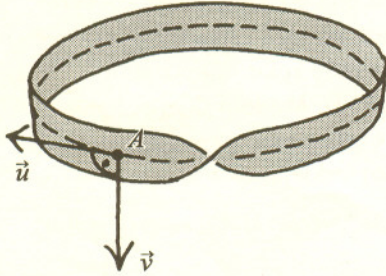
... i zawężłone:



Rys. 10

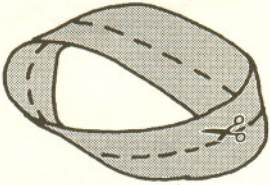


... po obiegu ...

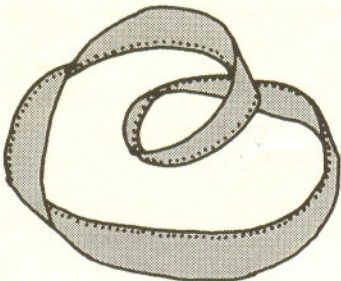


Rys. 11

wstęga Möbiusa —  
powierzchnia jednostronna:



po rozcięciu —  
powierzchnia dwustronna:

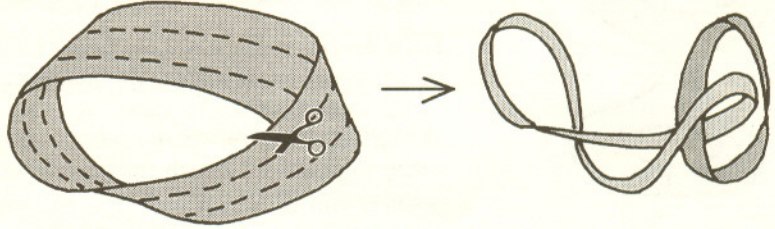


Rys. 12.

Wróćmy teraz do wstęg Möbiusa i przypatrzmy się jednej z nich. Nie tylko jest to powierzchnia jednostronna, ale ma jeden brzeg będący krzywą zamkniętą „niezawężloną” (rys. 10). Ponadto wyobraźmy sobie, że środkiem wstęgi Möbiusa od punktu  $A$  (rys. 11) przesuwamy wzajemnie prostopadłe wektory  $u$  i  $v$ . Po przejściu całej wstęgi i powrocie do punktu  $A$  wektory są skierowane przeciwnie – zmieniły orientację. Zatem pojęcie „orientacja” na powierzchniach jednostronnych nie ma sensu. Kolejną niespodzianką jest zachowanie się wstęgi Möbiusa podczas jej rozcinania. Co otrzymamy, gdy:

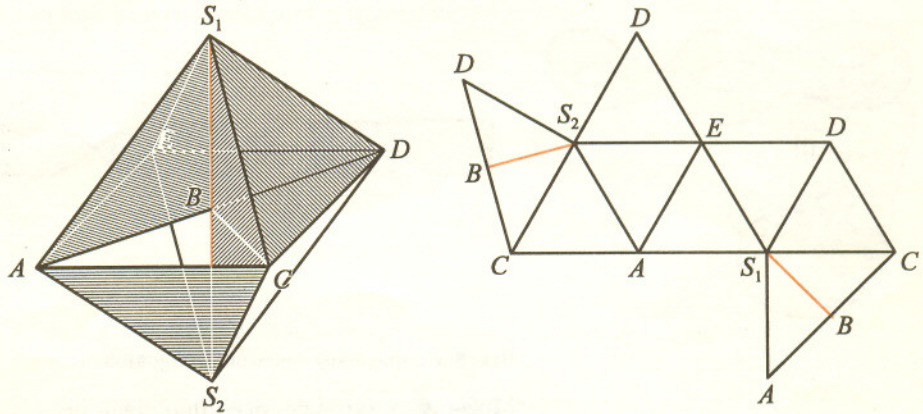
- (i) rozetniemy wstęgę Möbiusa wzdłuż linii środkowej równoległej do brzegu?
- (ii) rozetniemy wstęgę Möbiusa równoległe do brzegu w odległości  $1/3$  jej szerokości?

Ponieważ nasza intuicja i wyobraźnia czasem nas zawodzi, warto w tym miejscu sięgnąć po papier, klej, nożyczki i... eksperymentować (rys. 12 i 13).



Rys. 13. Po rozcięciu powstają dwie zaplecione wstęgi – krótsza jest powtórzeniem wyjściowej, dłuższa zaś jest skręcona o  $360^\circ$  i jest powierzchnią dwustronną.

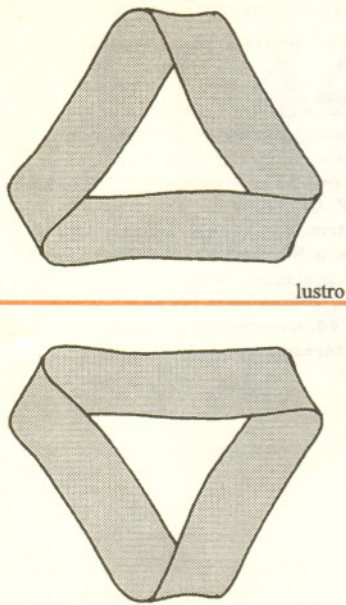
Prezentując wstęgę Möbiusa można jeszcze wspomnieć o jej modelu zaproponowanym przez B. Tuckermanna: wstęga składa się z sześciu ścian ośmiościanu i czterech trójkątów prostokątnych, jej brzegiem jest trójkąt  $ABC$  (rys. 14).



Rys. 14. Wstęga Möbiusa o płaskim brzegu.

Oczywiście, wstęga Möbiusa nie jest jedyną powierzchnią jednostronną, której model możemy otrzymać z paska papieru. Aby się o tym przekonać, trzeba wykonać model powierzchni wyobrażonej na rysunku 15 (pasek papieru skręcamy o  $3 \cdot 180^\circ$  w lewo lub w prawo) i zobaczyć, czym różni się od modelu „klasycznej” wstęgi Möbiusa. Z tak uzyskanymi nowymi modelami powierzchni jednostronnych możemy wykonać operacje (i) i (ii).

Z punktu widzenia topologii powierzchnie z brzegiem możemy nie tylko podzielić na dwustronne i jednostronne. Możemy je jeszcze rozróżnić ze względu na liczbę krzywych brzegowych i ich wzajemne położenie. Wykonując niżej proponowane modele (nie jest to łatwe) przekonamy się o bogactwie takiego podziału dla powierzchni o co najwyżej dwóch brzegach (odpowiednie rysunki znajdują się na przedniej okładce):

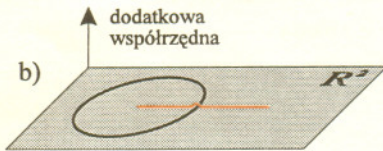


Rys. 15

- a) jednostronne powierzchnie z jednym brzołkiem
  - (1) brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną,
  - (2) brzeg jest krzywą zamkniętą zawężloną;
- b) dwustronne powierzchnie z jednym brzołkiem
  - (3) brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną,
  - (4) brzeg jest krzywą zamkniętą zawężloną;
- c) jednostronne powierzchnie z dwoma brzołkami
  - (5) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
  - (6) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
  - (7) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
  - (8) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
  - (9) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i nie są one wzajemnie zaczepione,
  - (10) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i są one wzajemnie zaczepione;
- d) dwustronne powierzchnie z dwoma brzołkami
  - (11) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
  - (12) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
  - (13) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
  - (14) oba brzołki są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
  - (15) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i obie krzywe nie są wzajemnie zaczepione,
  - (16) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i obie są wzajemnie zaczepione.



a)



b)

Rys. 16

Dotychczas omawiane powierzchnie zamknięte (bez brzołki) były zawsze dwustronne. Naturalne jest więc pytanie o istnienie powierzchni zamkniętych, ale jednostronnych. Powierzchnię tego rodzaju opisał po raz pierwszy w 1874 roku F. Klein (1849–1925). Jej poglądowe przedstawienie jest trochę kłopotliwe, gdyż, podobnie jak zawężonego okręgu nie można umieścić na płaszczyźnie (bo będą samoprzecięcia), tak *butelki Kleina* (patrz okładka – A(10)) nie można umieścić w przestrzeni trójwymiarowej. Możemy natomiast zaprezentować jej wyobrażenie w postaci powierzchni z pozornym samoprzecięciem. Aby zrozumieć, na czym ten trick polega, popatrzmy na rysunek 16. Rysunek 16a interpretowany w „normalny” sposób przedstawia podzbiór  $\mathbb{R}^2$  złożony z okręgu i przecinającego go odcinka. Możemy jednak umówić się, że przecięcie się obu tych figur jest tylko czymś pozornym, spowodowanym „niedoskonałością środków wyrazu”, gdyż w rzeczywistości sytuacja wygląda tak jak na rysunku 16b.

Butelka Kleina, bo o niej będziemy teraz mówić, jest pewną powierzchnią umieszczoną w czterowymiarowej przestrzeni. Rysunek A(10) przedstawia jej trójwymiarowe wyobrażenie z pozornym samoprzecięciem. Rozetnijmy ją, aby zobaczyć, jak ona wygląda wewnątrz (rys. B), następnie z obu części usuńmy pozorne samoprzecięcia. Po „wyprostowaniu” i „wygładzeniu” otrzymamy dwie wstęgi Möbiusa (rys. C). Cały ten proces możemy teraz odwrócić. Pokazuje to, że butelkę Kleina można otrzymać „sklejając” brzołkami dwie wstęgi Möbiusa. Rysunki A, B i C znajdują się na tylnej okładce.

Eksperymentować możemy dalej – wytnijmy w sferze koło (i wyrzucmy je), a następnie połączmy brzeg tej dziury z brzołkiem wstęgi Möbiusa. Otrzymamy... coś, czego znowu nie można narysować w przestrzeni trójwymiarowej. To *płaszczyzna rzutowa* stanowiąca model jednej z geometrii nieeuklidesowych – geometrii eliptycznej. Może warto poznać te zjawiska dokładniej i nie poprzestać na tym artykule, który bardziej przypomina „machanie rękami” niż precyzyjną matematykę.

#### Literatura

- [1] H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa, 1967.
- [2] M.P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [3] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria poglądowa*, PWN, Warszawa, 1956.
- [4] A. Lelek, *Zbiory*, PZWS, Warszawa, 1966.
- [5] A.S. Parchomienko, *Co to jest linia*, PWN, Warszawa, 1961.