Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1995

Zadania z matematyki nr 301, 302

Redaguje Marcin E. KUCZMA

301. Wielomian $P(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1}$ jest podzielny bez reszty przez wielomian $Q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$; współczynniki obu wielomianów są liczbami rzeczywistymi, $c_{n+1} = a_n \neq 0$. Dowieść, że

$$\max(|a_0|, \ldots, |a_n|) \le (n+1)\max(|c_0|, \ldots, |c_{n+1}|).$$

302. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Na półprostych $AD^{\to}$, $AC^{\to}$, $BC^{\to}$, $BD^{\to}$ odkładamy odpowiednio odcinki AK, AL, BM, BN o długościach $|AK| = |AE|$, $|AL| = |AD|$, $|BM| = |BD|$, $|BN| = |BE|$. Udowodnić, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy $|CD| = |DE|$.

Zadanie **302** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 283 (WT=2,19) i 284 (WT=2,36) z numeru 8/1994

Waldemar Pompe	– Warszawa	43,89
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	43,59
Mirosław Matlęga	– Skoczów	40,30

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1995

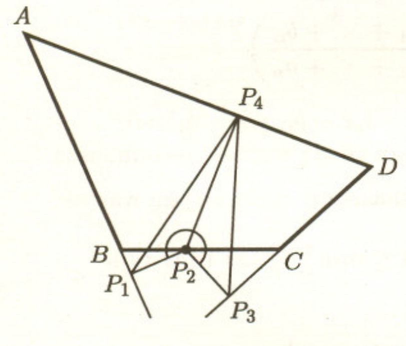
Przypominamy treść zadań:

293. Ciąg wielomianów $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ jest określony wzorami

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$
$$nP_{n+1}(x) = (n+1)xP_n(x) - P_{n-1}(x) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dowieść, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste każdego z wielomianów $P_n(x)$ są liczbami z przedziału $(-1; 1)$.

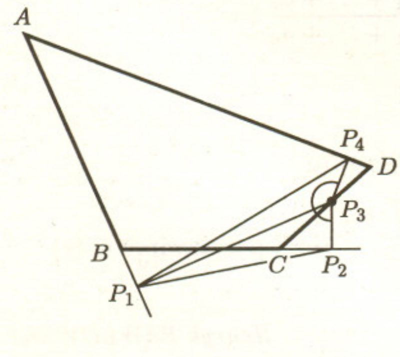
294. Udowodnić, że wewnątrz dowolnego czworokąta wypukłego $ABCD$ istnieje punkt, którego rzuty na proste AB, BC, CD, DA leżą na jednym okręgu.



293. Ustalmy liczbę rzeczywistą x taką, że $|x| \ge 1$, i oznaczmy wartość $P_n(x)$ przez a_n. Tak więc $|a_1| \ge |a_0|$. Przyjmijmy indukcyjnie, że dla pewnego n zachodzi nierówność $|a_n| \ge |a_{n-1}|$. Wówczas, tym bardziej, $|xa_n| \ge |a_{n-1}|$; zatem liczby xa_n oraz $xa_n - a_{n-1}$ są obie nieujemne lub obie niedodatnie i wobec tego

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{n+1}{n}xa_n - \frac{1}{n}a_{n-1}\right| = \left|xa_n + \frac{1}{n}(xa_n - a_{n-1})\right| =$$
$$= |xa_n| + \frac{1}{n}|xa_n - a_{n-1}| \ge |xa_n| \ge |a_n|.$$

Przez indukcję wnosimy, że $1 = |a_0| \le |a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le \ldots$ Stąd wniosek, że dla $|x| \ge 1$ żadna z liczb $P_n(x)$ nie jest równa zeru.

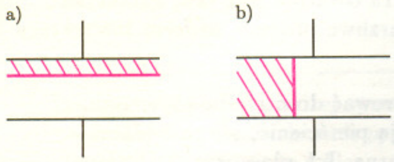


294. Nie tracąc ogólności przyjmijmy, że $|\angle ABC| + |\angle BCD| \ge 180°$ oraz $|\angle BCD| + |\angle CDA| \ge 180°$. Dla punktu P leżącego wewnątrz lub na brzegu czworokąta $ABCD$, nie pokrywającego się z żadnym z wierzchołków, oznaczmy przez P_1, P_2, P_3, P_4 rzuty P odpowiednio na proste AB, BC, CD, DA, a przez $|\angle P_1|$, $|\angle P_2|$, $|\angle P_3|$, $|\angle P_4|$ miary kątów wewnętrznych czworokąta $P_1P_2P_3P_4$.

Jeśli punkt P leży na odcinku BC (a więc P_2 pokrywa się z P), to $|\angle P_2| \ge 180°$. Jeśli punkt P leży na odcinku CD (a więc P_3 pokrywa się z P), to $|\angle P_3| \ge 180°$. Suma $|\angle P_1| + |\angle P_3|$ jest w pierwszym przypadku mniejsza od 180°, a w drugim – większa od 180°. Gdy punkt P zmienia swoje położenie, miary kątów czworokąta $P_1P_2P_3P_4$ zmieniają się w sposób ciągły. Jeżeli więc punkt P przebiega dowolny odcinek, którego jeden koniec leży na boku BC, a drugi na CD, to suma $|\angle P_1| + |\angle P_3|$ przyjmie przy pewnym położeniu punktu P wartość 180°. Na czworokącie $P_1P_2P_3P_4$ da się wówczas opisać okrąg.

Zadania z fizyki nr 199, 200

199. Między okładki płaskiego kondensatora powietrznego wpuszczono ciecz dielektryczną w ilości niewystarczającej do wypełnienia przestrzeni między okładkami. Jeśli kondensator naładować, to czy ciecz utworzy warstwę równoległą do okładek (rys. 1a), czy też zajmie część powierzchni okładek (rys. 1b)? Należy pominąć efekty brzegowe, tzn. przyjąć, że rozmiary okładek (zarówno w części zajętej przez ciecz na rysunku 1b, jak i w pozostałej części) są znacznie większe od ich wzajemnej odległości, a ponadto pominąć efekty siły ciężkości oraz napięcia powierzchniowego.



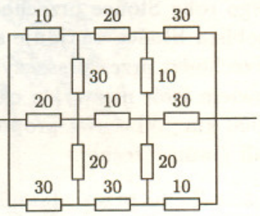
Rys. 1.

200. Ciało o masie m porusza się po linii prostej pod wpływem siły wywieranej przez nieważką sprężynę o stałej sprężystości k. Punkt zamocowania drugiego końca sprężyny tak się obluzował, że sprężyna drgając porusza nim; jego prędkość jest proporcjonalna do siły, a stała proporcjonalności α jest dana. Zakładając, że α jest małe (obluzowanie jest niewielkie) obliczyć, po jakim czasie amplituda drgań ciała zmaleje 2 razy w stosunku do amplitudy początkowej.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1995

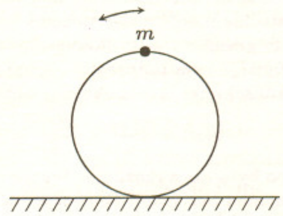
Przypominamy treść zadań:

191. Obliczyć przybliżoną wartość oporu zastępczego obwodu przedstawionego na rysunku 2 (liczby oznaczają oporności w omach). Należy podać ocenę dokładności przybliżenia i uzasadnić ją. Rozwiązanie powinno być możliwie dokładne, a jednocześnie jak najmniej pracochłonne. Użycie komputera do obliczeń jest wykluczone.



Rys. 2.

192. Małe ciało o masie m przymocowano do cienkiej obręczy o masie M i promieniu r. Obręcz postawiono pionowo (rys. 3) i bardzo lekko pchnięto w lewo lub w prawo. Jeśli podczas ruchu obręczy nie występuje poślizg ani straty energii, to jaka musi być wartość stosunku M/m, aby obręcz „podskoczyła”, tzn. oderwała się od podłoża?



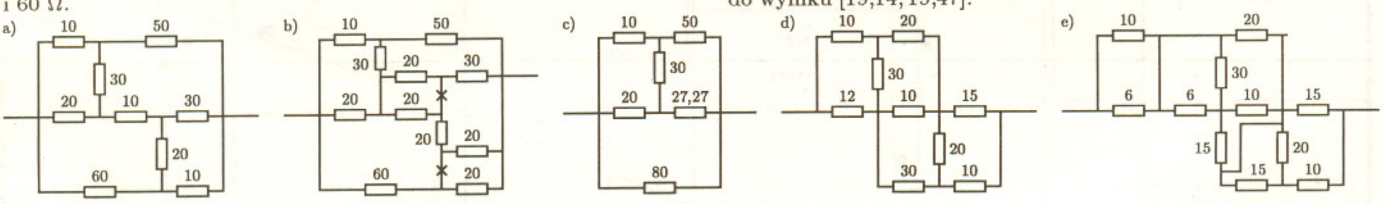
Rys. 3.

191. Skorzystamy z oczywistego twierdzenia, że przerwanie któregokolwiek połączenia w obwodzie nie zmniejsza oporu zastępczego całości, a zwarcie dowolnych dwóch punktów nie zwiększa oporu. Aby uzyskać oszacowanie od góry, przerwijmy więc wszystkie połączenia pionowe na schemacie. Wtedy mamy trzy opory: 60 Ω, 60 Ω i 70 Ω połączone równolegle, a ich opór zastępczy wynosi 21 Ω (zapiszmy to w skrócie tak: $60 \oplus 60 \oplus 70 = 21$, gdzie znakiem $\oplus$ oznaczono operację $a \oplus b = (a^{-1} + b^{-1})^{-1}$). Dla oszacowania od dołu zewrzyjmy wszystkie połączenia pionowe; ponieważ $10 \oplus 20 \oplus 30 = 5{,}455$, a $30 \oplus 30 \oplus 10 = 6$, więc całkowity opór wynosi $2 \cdot 5{,}455 + 6 = 16{,}91$ Ω. Taką „brutalną” metodą zamknęliśmy szukany opór w przedziale [16,91, 21].

Zawężenie przedziału wymaga zastosowania bardziej subtelnego podejścia. Zacznijmy od oszacowania od góry. Usuwamy tym razem tylko dwa oporniki pionowe: prawy górny 10 Ω i lewy dolny 20 Ω (ich okolica wydaje się zbliżona do zrównoważonego mostka). W powstałym obwodzie (rys. 4a) można zauważyć, że prąd przepływający przez środkowy opornik 10 Ω dzieli się w przybliżeniu równo na prawy opornik 30 Ω i pionowy opornik 20 Ω; tak samo wydaje się, że prąd płynący przez prawy dolny opornik 10 Ω pochodzi w połowie z oporników 20 Ω i 60 Ω.

Posłużymy się więc trickiem: każdy z tych oporników 10 Ω zastąpimy dwoma równolegle połączonymi opornikami po 20 Ω (rys. 4b) i – zgodnie z zasadą oszacowania od góry – przerwiemy połączenia oznaczone krzyżykami. Standardowe przekształcenia ($50 \oplus 60 = 27{,}273$) prowadzą do schematu z rysunku 4c. Następny trick polega na założeniu, że prąd płynący przez opornik 30 Ω jest 2 razy mniejszy od prądu przechodzącego przez opornik 20 Ω i zgodnie z tym na zastąpieniu opornika $R = 27{,}273$ Ω przez dwa równoległe: $3R = 81{,}82$ Ω i $1{,}5R = 40{,}91$ Ω. Po „rozcięciu” wyliczamy $81{,}82 + 30 = 111{,}82$, $111{,}82 \oplus 50 = 34{,}55$, $44{,}55 \oplus 60{,}91 \oplus 80 = 19{,}47$.

Poprawione oszacowanie od dołu rozpoczynamy od zwarcia tych samych co poprzednio pionowych oporników 10 Ω i 20 Ω. Na otrzymanym schemacie (rys. 4d) przyjmijmy, że spadki napięcia na górnym oporniku 10 Ω i na pionowym oporniku 30 Ω są zbliżone – zastąpmy więc opornik 12 Ω dwoma po 6 Ω połączonymi szeregowo i zewrzyjmy punkty mające – jak sądzimy – zbliżony potencjał. Taką samą operację zróbmy z opornikiem 30 Ω na dole, dzieląc go na dwa po 15 Ω i zwierając złącze jak na rysunku 4e. Dalsze przekształcenia są banalne, a w wyniku otrzymujemy 19,14 Ω. Jak widać, niewielkim nakładem pracy ograniczyliśmy możliwy przedział do wyniku [19,14, 19,47].



Rys. 4

192. Oznaczmy przez α kąt obrotu obręczy względem położenia początkowego. Prędkość kątowa ω jest równa $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$, a prędkość liniowa $\vec{v}$ małego ciała jest sumą prędkości środka obręczy i prędkości ruchu obiegowego względem środka:

$$\vec{v} = [\omega r, 0] + [\omega r \cos\alpha, -\omega r \sin\alpha] = \omega r[1 + \cos\alpha, -\sin\alpha]\,.$$

Całkowitą energię kinetyczną $\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M(\omega r)^2 + \frac{1}{2}mv^2$ przyrównujemy do spadku energii potencjalnej $mgr(1-\cos\alpha)$ i podstawiamy moment bezwładności obręczy $I = Mr^2$. Otrzymujemy

$$mg(1-\cos\alpha) = \omega^2 r(M + m(1+\cos\alpha))\,. \tag{1}$$

Różniczkując to równanie względem czasu wyznaczymy przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{m(M+2m)g\sin\alpha}{2r(M+m(1+\cos\alpha))^2}\,. \tag{2}$$

Pionową składową siły reakcji podłoża znajdziemy ze wzoru $N = (M+m)g + ma_y = (M+m)g + m\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$, czyli po podstawieniu $v_y = -\omega r \sin\alpha$ mamy

$$N = (M+m)g - m\varepsilon r\sin\alpha - m\omega^2 r\cos\alpha\,.$$

Analiza numeryczna wyrażenia otrzymanego po podstawieniu tu wzorów (1) i (2) prowadzi do wniosku, że siła N jest dodatnia dla wszystkich wartości α tylko wtedy, gdy $M/m > 0{,}0769$. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to obręcz „podskoczy” (gdy M/m jest nieznacznie mniejsze od 0,0769, podskok nastąpi w okolicy kąta α równego 113°).