Kącik olimpijski (10) Nierówność Cauchy'ego dla średnich pomaga, lecz... nie zawsze!

Mogli się o tym przekonać uczestnicy zawodów stopnia drugiego XLIV Olimpiady Matematycznej, kiedy przyszło im zmagać się m.in. z takim oto zadaniem:

Udowodnić, że dla liczb dodatnich x, y, u, v zachodzi nierówność

$$\frac{xy+xv+uy+uv}{x+y+u+v} \geq \frac{xy}{x+y} + \frac{uv}{u+v}.$$

Z zainteresowaniem przyglądałem się „walce" z tym zadaniem uczniów próbujących „strzelać" do niego z nierówności Cauchy'ego, Czebyszewa, a bywało, że i z takiej „armaty" jak nierówność Jensena. Niestety, na próżno! Tym razem ten arsenał nie przydał się.

Najszybciej uporali się z tym zadaniem ci uczniowie, którzy tę nierówność po prostu przekształcali. Co robili? Ano, najpierw pomnożyli obie strony tej nierówności przez iloczyn mianowników występujących w niej ułamków i po prostym przekształceniu otrzymali nierówność

$$(xu+yu)[(xv+yu)+(xu+yv)] \geq (u+v)^2xy + (x+y)^2uv,$$

równoważną, oczywiście, wyjściowej.

Następnie wykonali wskazane działania, czyli „zlikwidowali" wszystkie nawiasy, przenieśli wszystkie wyrazy na lewą stronę i po redukcji otrzymali nierówność

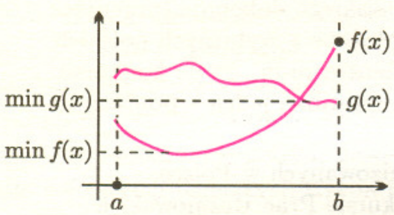
$$x^2v^2 - 2xvyu + y^2u^2 \geq 0, \quad \text{czyli nierówność} \quad (xv-yu)^2 \geq 0$$

i mieli... „po zadaniu".

Z nierównością tą, jak również z jej uogólnieniem, wiąże się pewna metoda dowodzenia nierówności, o której teraz trochę opowiemy.

Załóżmy, że mamy dwie funkcje f i g, określone na pewnym przedziale $\langle a,b\rangle$, osiągające w nim swoje wartości najmniejsze (największe). Jeśli równie $f+g$ osiąga swoją wartość najmniejszą (największą), to

$$\min f(x) + \min g(x) \leq \min(f(x)+g(x)),$$
$$\max f(x) + \max g(x) \geq \max(f(x)+g(x)).$$



Istotnie, jeśli $x_0 \in \langle a,b\rangle$ jest punktem, w którym funkcja $f+g$ osiąga swą wartość najmniejszą (największą), to, oczywiście,

$$f(x_0) \geq \min f(x) \quad \text{i} \quad g(x_0) \geq \min g(x),$$
$$f(x_0) \leq \max f(x) \quad \text{i} \quad g(x_0) \leq \max g(x).$$

Stąd otrzymujemy natychmiast żądaną nierówność.

Łatwo stwierdzić też, że równość w nierówności tej ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f i g osiągają swoje wartości najmniejsze (największe) w tym samym punkcie.

Analogiczną nierówność mamy dla n funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min f_i(x) \leq \min\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right), \quad \sum_{i=1}^{n} \max f_i(x) \geq \max\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right).$$

Dowód tego otrzymujemy przez oczywistą indukcję.

Rozważmy teraz funkcje $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ określone wzorem

$$f_i(x) = (a_i+b_i)x^2 + 2a_ix + a_i, \quad \text{gdzie}$$
$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Każda z tych funkcji osiąga, oczywiście, wartość najmniejszą, równą

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4a_i^2 - 4a_i(a_i+b_i)}{4(a_i+b_i)} = \frac{a_ib_i}{a_i+b_i}.$$

Również funkcja

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right)x^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

osiąga swoją wartość najmniejszą, równą

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)+\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i\right)}.$$

Widzimy zatem, że nierówność $\sum \min f_i(x) \le \min\left(\sum f_i(x)\right)$ to, w tym przypadku, nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i+b_i} \le \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)+\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i\right)},$$

która dla $n=2$ jest nierównością przedstawioną na początku tego Kącika.

Rozwiążmy na koniec, tą samą metodą, jeszcze dwa zadania.

Zadanie 1. Udowodnić, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami dodatnimi, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$\frac{b_1^2}{a_1}+\ldots+\frac{b_n^2}{a_n} \ge \frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcje

$$f_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x, \quad i=1,2,\ldots,n, \text{ gdzie } a_i>0,\ b_i \in \mathbf{R}.$$

Otóż każda z nich osiąga swoją wartość najmniejszą równą $-b_i^2/a_i$, natomiast najmniejsza wartość funkcji

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) x$$

wynosi $-\dfrac{(b_1+\ldots+b_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$.

Przyjrzyjmy się teraz nierówności $\sum \min f_i(x) \le \min \sum f_i(x)$, a okaże się, że w tym przypadku jest to nierówność z zadania.

Zadanie 2. Dowieść, że jeżeli a_i oraz b_i są liczbami dodatnimi ($i=1,2,\ldots,n$), to

$$(*) \qquad \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1} \cdot \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{b_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n} \ge \left(\frac{b_1+\ldots+b_n}{a_1+\ldots+a_n}\right)^{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcje $f_i(x) = a_i \mathrm{e}^x - b_i x - b_i$, gdzie $a_i>0$, $b_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$. Każda z tych funkcji osiąga swoją wartość najmniejszą w punkcie $\ln\dfrac{b_i}{a_i}$, równą $-b_i \ln\dfrac{b_i}{a_i}$. Podobnie wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji $\sum\limits_{i=1}^n f_i(x)$. Zatem nierówność $\sum \min f_i(x) \le \min \sum f_i(x)$ to w tym przypadku nierówność

$$\sum_{i=1}^n b_i \ln\frac{b_i}{a_i} \ge \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \ln\frac{b_1+\ldots+b_n}{a_1+\ldots+a_n},$$

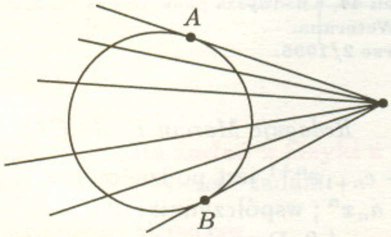
z której wprost wynika nierówność zadania.

Uwaga. Z nierówności $(*)$ otrzymujemy:

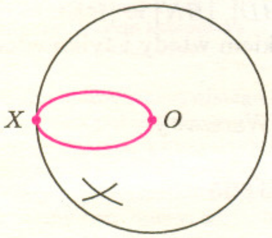
1. nierówność Cauchy'ego dla średnich, jeśli podstawimy $b_1=b_2=\ldots=b_n=1/n$,
2. nierówność $b_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot b_n^{b_n} \ge \left(\dfrac{b_1+\ldots+b_n}{n}\right)^{b_1+\ldots+b_n}$, jeśli podstawimy w $(*)$ $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

Henryk PAWŁOWSKI

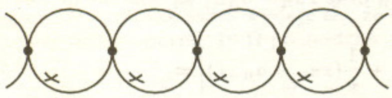
Rozwiązanie zadania M 740.
Sferę bez dwóch biegunów można, oczywiście, rozbić na sumę parami rozłącznych okręgów. Rozbicie takie dają równoleżniki. Ogólniej, sferę bez dwóch punktów nie leżących na końcach jednej średnicy też można rozbić na parami rozłączne okręgi – rozbicie otrzymujemy przecinając sferę płaszczyznami, jak na rysunku.



Pokażemy teraz, jak rozbić na parami rozłączne okręgi kulę otwartą z jednym dołączonym punktem X na brzegu. Rozważmy okrąg o średnicy OX, gdzie O jest środkiem owej kuli.



Po „wyjęciu" z kuli owego okręgu widzimy, że z każdej sfery o środku O zawartej w naszej kuli ubyły dwa punkty, a taką sferę potrafimy rozbić na parami rozłączne okręgi. A więc ów okrąg o średnicy OX oraz rozbicie na okręgi każdej z „poprzekłuwanych" sfer daje rozbicie całej kuli z dołączonym punktem X na parami rozłączne okręgi. Ustawmy teraz tak ciąg kul otwartych o jednakowych promieniach, aby środki tych kul leżały na jednej prostej p i aby kolejne kule były styczne.



Dołączmy do tych kul wszystkie punkty styczności (do każdej po jednym). Te kule wraz z punktami styczności umiemy już rozbić na parami rozłączne okręgi. Resztę przestrzeni $\mathbf{R}^3$ wypełniamy okręgami leżącymi w płaszczyznach prostopadłych do p i mającymi środki na tej prostej.