5/95
(51)

Dwa zamieszczone poniżej rysunki wykonał Rafał Rogala, uczeń Liceum Ogólnokształcącego w Bochni; gdy je rysował, uczęszczał do I klasy.

Rodzina Pustych (zbiorów)

Wirusy komputerowe, opisane w poprzednim numerze *EPSILONA*, nie istnieją; był to żart primaaprilisowy, który, mamy nadzieję, nie stanie się inspiracją twórczą dla autorów wirusów.

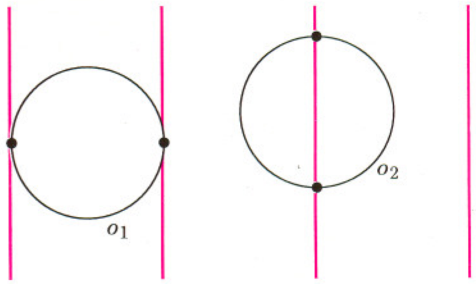
Przecięcia

Zacznijmy od pytania: czy istnieją dwa takie podzbiory płaszczyzny, że jakkolwiek położymy je na tej płaszczyźnie, to zawsze będą miały dokładnie jeden punkt wspólny? Używając uczonego matematycznego języka, powyższe proste zdanie formułuje się w następujący sposób: *czy istnieją takie $A, B \subset \mathbf{R}^2$, że dla dowolnych izometrii płaszczyzny f i g:* $\mathrm{card}(f(A) \cap g(B)) = 1$*?*

Gdy się chwilę nad tą zagadką pomyśli, odpowiedź szybko się nasunie. Oczywiście, twierdzenie jest prawdziwe – wystarczy wziąć jako jeden zbiór punkt, a jako drugi całą płaszczyznę. Dobrze; to jest jednak przypadek raczej banalny, odrzućmy go więc i zapytajmy o istnienie innego przykładu. Co wtedy?

Otóż, odpowiedź jest znana, ale nie w pełni satysfakcjonująca – wiadomo, że takie zbiory istnieją, ale nikt nie potrafił, jak dotąd, pokazać konkretnych przykładów... Problem postawił nie byle kto, bo Hugo Steinhaus, a rozwiązał też nie byle kto, bo Wacław Sierpiński. Może wymienienie tych nazwisk będzie pewnego rodzaju „prztyczkiem w nos" dla osób, które uważają, że tego rodzaju problemy można traktować jedynie jako zabawę i szanujący się matematycy nie powinni im poświęcać uwagi. Dowód istnienia odpowiednich zbiorów opiera się na poważnej machinerii teoriomnogościowej – nie wszystkim Czytelnikom to coś powie, ale korzysta się z aksjomatu wyboru i indukcji pozaskończonej. Otwarte pozostaje pytanie, czy istnieją „porządne" zbiory o szukanych własnościach.

Problem można uogólnić – zamiast o zbiory przecinające się w dokładnie jednym punkcie zapytać o zbiory przecinające się w dokładnie n punktach. I tu odpowiedź jest zabawna. Gdy n jest liczbą parzystą, istnieje elementarne rozwiązanie. Dla n równego 2 wystarczy wziąć jako pierwszy zbiór okrąg o średnicy 1, a jako zbiór drugi rodzinę takich prostych równoległych, że dwie kolejne proste są odległe o 1. Łatwo zauważyć, że jakkolwiek położymy na płaszczyźnie czy okrąg, czy te proste, dwa zbiory będą miały dokładnie 2 punkty wspólne. Cztery punkty wspólne? Nic łatwiejszego; wystarczy rozważyć okrąg o średnicy równej 2. I tak dalej. A co z liczbami nieparzystymi? O ile mi wiadomo, problem jest wciąż otwarty.



Można też zastanowić się nad zadaniem łatwiejszym: zamiast podzbiorów płaszczyzny rozważać podzbiory prostej. Pozostawiam je Czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania.

Krzysztof CIESIELSKI

Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.