

Całka Gaussa

E.T. Bell w swojej książce *Men of Mathematics* (Simon and Schuster, New York 1937) przytacza następującą anegdotę o lordzie Kelvinie (właściwie: Williamie Thomsonie, 1824–1907). Miał on zapytać uczniów w klasie: „Czy wiecie, kto to jest matematyk?” Podszedł do tablicy i napisał na niej

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Wskazując palcem na to, co napisał, zwrócił się do uczniów: „Matematyk to ktoś, dla kogo to jest tak oczywiste jak to, że dwa i dwa daje cztery”.

Całka, o której tu mowa, w literaturze zwana jest całką Poissona, całką Laplace’a lub właśnie całką Gaussa. Ma ona istotne zastosowania w teorii prawdopodobieństwa, statystyce matematycznej i teorii funkcji specjalnych. Jej obliczenie wcale nie jest kłopotliwe, o ile znamy całkę podwójną. Oznaczmy

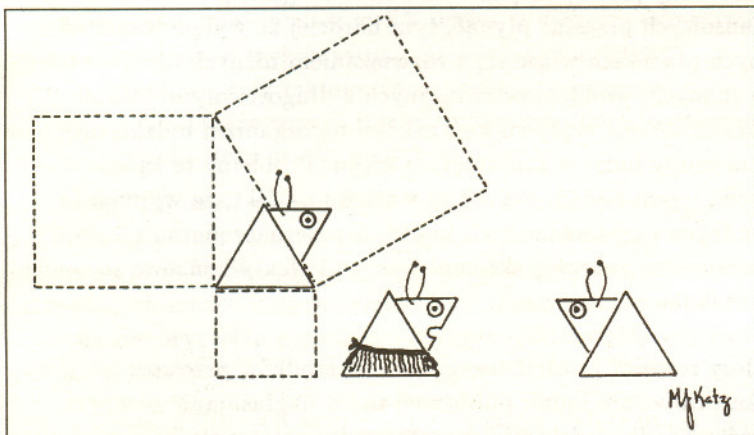
$$G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

i niech $y = sx$. Wtedy $dy = x ds$ oraz

$$\begin{aligned} G^2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+s^2)} x ds \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x e^{-x^2(1+s^2)} dx \right) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{-2(1+s^2)} e^{-x^2(1+s^2)} \right]_{x=0}^{x=+\infty} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} s]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

skąd $G = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Z parzystości funkcji podcałkowej wynika wzór (*).

Jarosław GÓRNICKI



Wybieramy się na bal maskowy, Gerald idzie jako twierdzenie Pitagorasa.

(Science, vol. 246, 1989)

wynikającego z przekształcenia wzoru opisującego prawo rozpadu promieniotwórczego.

Można powiedzieć, że wszelkie szczątki organiczne i skamieliny żyjątek, jak np. korale i mięczaki, zawierają w sobie specyficzny zegar radiowęglowy, który rozpoczyna swój bieg w chwili zakończenia życia organizmu. Praktycznie zegar ten chodzi wiecznie. Jego „wskazówkami” są pozostałe atomy radioaktywnego węgla ^{14}C wchodzące w skład organizmu lub obecne w wytworzonym wapieniu, w którym węgiel ^{14}C związany jest z wapniem w węglan wapnia CaCO_3 . Omawiana metoda była sprawdzana przez analizę czasowej zależności względnej zawartości atomów ^{14}C w próbkach sporządzonych z fragmentów grobów faraonów, których datę śmierci ustalono według zapisków odczytanych na papyrusach. Ta metoda, tak jak każda inna metoda naukowa, ma szereg ograniczeń zakresu swojego zastosowania. Tylko przy spełnieniu wynikających z nich wymagań i pokonaniu trudności natury eksperymentalnej może dawać poprawne wyniki. Wymaga ona bezpowrotnego zniszczenia szczątków organicznych poprzez ich spalenie. Nie zawsze to wymaganie może być łatwo spełnione ze względu np. na możliwe znaczenie historyczne znaleziska. Z otrzymanych po spaleniu pozostałości sporządza się próbki i w postaci np. cienkiej warstwy grafitu wprowadza się je do gazowego detektora lub umieszcza przed okienkiem licznika. Ze względu na to, że w rozpadzie ^{14}C emitowane są cząstki β^- o niewielkiej energii (maksymalna energia $Q_\beta = 0,156 \text{ MeV}$), zarówno badana próbka, jak i okienko licznika cząstek β muszą być bardzo cienkie. Jeśli natomiast badana jest próbka węgla w postaci gazu, to trudność wynika z konieczności stosowania detektora o bardzo dużej objętości. Objętość CO_2 zawierająca zaledwie 1 gram węgla (przy ciśnieniu atmosferycznym) to około 2 litry.

Metoda Libby’ego zakłada, że strumień promieniowania kosmicznego (warunkujący wytwarzanie neutronów w atmosferze) ma stałe natężenie. Tylko wtedy, o ile to założenie jest prawdziwe, proces aktywacji neutronowej atomów azotu, zachodzący ciągle w atmosferze, może prowadzić po czasie $6 \cdot T_{1/2}$ do obecności w niej praktycznie stałej względnej zawartości węgla ^{14}C . Biorąc pod uwagę to, że wiek Ziemi jest znacznie dłuższy niż okres $6 \cdot T_{1/2} = 34\,380$ lat, można uznać istnienie swoistego stanu nasycenia dla ilości promieniotwórczych atomów ^{14}C w atmosferze. Stan taki opisuje się stałą wartością aktywności A_0 , którą można nazwać aktywnością nasycenia