Teoria liczb i geometria

Piotr Wojciech ŚNIADY

Jest to skrót pracy „Geometryczne dowody dwóch twierdzeń dotyczących ułamków Fareya", za którą Autor zdobył srebrny medal na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1994 roku.

Niekiedy twierdzeń z teorii liczb dowodzi się wykorzystując metody geometryczne. Zilustrujemy to podając nowe dowody dwóch twierdzeń dotyczących tzw. ułamków Fareya.

Niech N będzie dowolną, ustaloną liczbą naturalną.

Ciąg $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$ wszystkich ułamków **nieskracalnych** z przedziału $[0,1]$, o mianownikach nie przekraczających N, ustawionych w porządku rosnącym, nazwiemy ciągiem ułamków Fareya. Dla $N = 7$ takim ciągiem jest

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}.$$

Aż do końca artykułu wszystkie ułamki Fareya będą odpowiadać jednej ustalonej liczbie N.

Twierdzenie 1. *Niech* $\frac{m}{n}$ *i* $\frac{m'}{n'}$ $\left(\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}\right)$ *będą dwoma kolejnymi wyrazami ciągu ułamków Fareya. Wówczas*

$$m'n - mn' = 1\,.$$

Dowód. Rozważmy w układzie współrzędnych dwa punkty $A = (n,m)$ i $B = (n',m')$. Niech O oznacza początek układu współrzędnych. We wnętrzu odcinka AO nie ma żadnego punktu kratowego (tzn. punktu o obu współrzędnych całkowitych). W przeciwnym bowiem przypadku punkt kratowy (a,b) z wnętrza odcinka AO spełniałby $\frac{b}{a} = \frac{m}{n}$ (twierdzenie Talesa) oraz $a < n$, co przeczy nieskracalności ułamka $\frac{m}{n}$. Analogicznie nie ma punktów kratowych we wnętrzu odcinka BO.

Udowodnimy teraz, że również we wnętrzu odcinka AB, jak i we wnętrzu trójkąta OAB nie ma punktów kratowych. Przypuśćmy bowiem, że można znaleźć punkt kratowy (a,b) należący do brzegu lub wnętrza trójkąta OAB, nie leżący jednak na żadnym z boków OA i OB. Stąd a jest mniejsze od większej z liczb n, n' i w konsekwencji $a \leq N$. Ponieważ punkt (a,b) leży między półprostymi OA i OB, więc wobec twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{m}{n} < \frac{b}{a} < \frac{m'}{n'}\,.$$

Przeczy to założeniu, że $\frac{m}{n}$ i $\frac{m'}{n'}$ są kolejnymi ułamkami Fareya.

Podsumowując, udowodniliśmy, że na brzegu trójkąta OAB leżą dokładnie trzy punkty kratowe: O, A, B, oraz że we wnętrzu trójkąta OAB nie ma punktów kratowych.

Skorzystamy teraz z następującego ślicznego twierdzenia Picka (jego dowód można znaleźć w *Delcie* 4/1993).

Niech S oznacza pole powierzchni dowolnego wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych, B – liczbę punktów kratowych leżących na jego brzegu, a W – liczbę punktów kratowych w jego wnętrzu. Wówczas $S = W + \frac{1}{2}B - 1$.

Jak fizyk gra na giełdzie albo od upadku do rozmagnesowania adiabatycznego

Jan GAJ

Artykuł ten ukazał się w piśmie studentów Nauczycielskiego Kolegium Fizyki *Młoda Fizyka*.

Każdy, kto kiedykolwiek przewrócił się albo spadł skądkolwiek, zgodzi się, że **układ fizyczny dąży do osiągnięcia minimalnej energii**.

Chwila zastanowienia uprzytomni nam, że doświadczenia prowadzące do sformułowania powyższej zasady dotyczą układów **makroskopowych**. Naturalne pytanie, czy dotyczy ona także mikroskopowych stopni swobody, można zaatakować posługując się powszechnie uznawanym **rozkładem kanonicznym**. Określa on prawdopodobieństwo tego, że układ w równowadze znajdzie się w określonym stanie α (o energii E_α). Jest ono wykładniczą funkcją stosunku energii do temperatury,

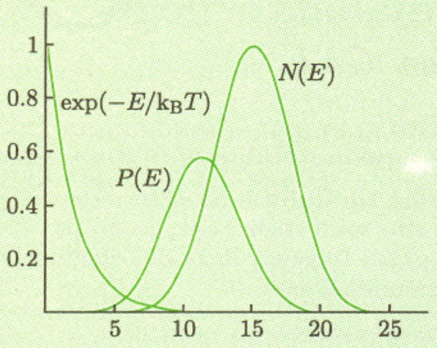
$$P_\alpha \sim \exp(-E_\alpha/k_B T)\,,$$

gdzie k_B oznacza stałą Boltzmanna. Zbyt łatwy byłby jednak wniosek: „ależ tak, zasada stosuje się zawsze, przecież przy najniższej energii prawdopodobieństwo jest największe!". Nie ostaje się on w konfrontacji ze światem, w którym morza nie są zamarznięte, powietrze nie zestaliło się, a wnętrze Słońca dysponuje ogromną nadwyżką energii hojnie rozsyłanej wokół od miliardów lat. A więc **rozkład kanoniczny w niebezpieczeństwie?** Nietrudno go uratować zauważając, że czym innym jest prawdopodobieństwo P_α zajęcia stanu α, a czym innym prawdopodobieństwo $P(E)$ tego, że układ będzie miał energię E, czyli że zajmie **jakikolwiek** stan o tej energii (może być ich wiele). To drugie jest większe od pierwszego tyle razy, ile wynosi liczba $N(E)$ stanów układu o energii E

$$P(E) \sim N(E)\exp(-E/k_B T)\,.$$

Układ przyjmie więc energię bliską wartości, dla której powyższe wyrażenie osiąga wartość największą. Przykładem może być układ n mikroskopowych momentów magnetycznych o spinie 1/2, z których każdy może zajmować tylko dwa stany o energiach różniących się o $\mu_B B$, gdzie μ_B – magneton Bohra oraz B – pole magnetyczne, w którym umieszczono te spiny. Liczba możliwych realizacji stanu, w którym k spośród n spinów jest wzbudzonych (o wyższej energii), wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



Na rysunku (gdzie $P(E)$ i $N(E)$ przedstawiono w różnej skali) widać, że choć P_α ma maksimum dla najniższej energii (energia jest proporcjonalna do k), $P(E)$ jest największe przy innej jej wartości. Można widzieć decyzję układu, jaką energię przyjąć, jako wynik walki dwóch tendencji: energia przez człon $\exp(-E/k_B T)$ ciągnie w stronę swojej najniższej wartości, natomiast nieporządek uosobiony przez funkcję $N(E)$ próbuje zwiększyć energię do połowy zakresu jej wartości, bo tam jest największy. Walkę tę można jeszcze prościej przedstawić po zlogarytmowaniu. Będziemy wtedy szukali maksimum funkcji

$$-E/k_B T + \ln N(E)$$

albo, równoważnie, minimum funkcji

$$F = E - k_B T \ln N(E).$$

Widać teraz, że to nie energia układu ma przyjąć minimum, ale inna funkcja stanu: energia pomniejszona o wartość $k_B T \ln N(E)$. Nosi ona nazwę **energii swobodnej**. Omawianą poprzednio walkę widać tu jak na dłoni: energia chce być jak najmniejsza, natomiast nieporządek – jak największy. Miarą nieporządku jest tu wielkość $S = k_B \ln N(E)$ – nazywamy ją **entropią**, natomiast temperaturę T możemy teraz zobaczyć jako kurs, po jakim „sprzedaje się” entropia, albo jako (energetyczną) cenę jednostki nieporządku (jednostki entropii). Po tych wszystkich rozważaniach możemy więc powiedzieć, że prawo, które zostało sformułowane na początku tego tekstu, jest prawdziwe pod warunkiem uzupełnienia go słowem **„swobodnej”**.

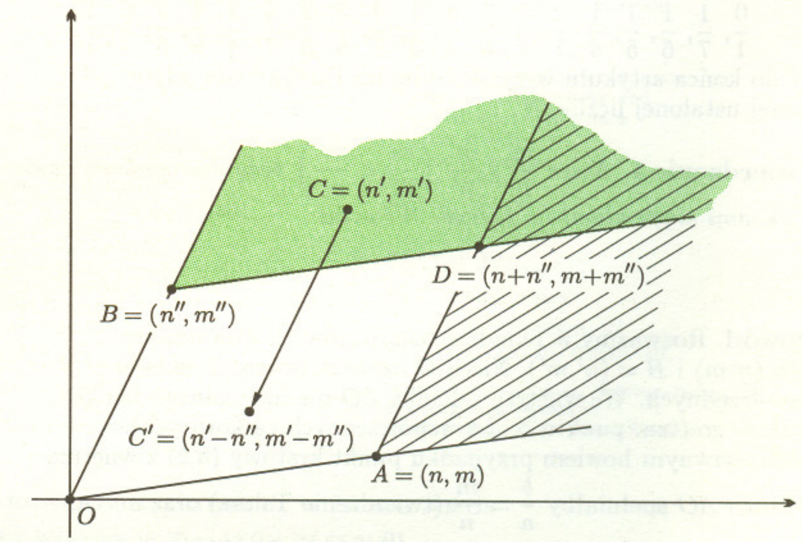
Stąd pole trójkąta OAB jest równe $\frac{1}{2}$. Z drugiej zaś strony nietrudno obliczyć (korzystając z geometrii analitycznej), że pole trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, (n,m) i (n',m') jest równe $|m'n - mn'|/2$. Porównując oba wyniki i korzystając z faktu, że $m'n > mn'$, ostatecznie otrzymujemy

$$m'n - mn' = 1.$$

Twierdzenie 2. *Niech* $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$ *będą trzema kolejnymi wyrazami ciągu ułamków Fareya. Wówczas*

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}.$$

Dowód. Niech A, B, C, D mają takie współrzędne jak na rysunku 1. Ponieważ $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \frac{m''}{n''}$, więc punkt C leży między półprostymi OA i OB. Udowodnimy, że leży on na brzegu lub we wnętrzu równoległoboku $OBDA$.



Rys. 1

Przypuśćmy bowiem, że leży on poza równoległobokiem. Wówczas należy on do obszaru kolorowego bądź zakreskowanego. Przypuśćmy, że należy on do obszaru kolorowego. Wówczas punkt $C' = (n' - n'', m' - m'')$ powstały z C w wyniku przesunięcia o wektor $\overrightarrow{BO}$ nadal leży między półprostymi OA i OB. Stąd

$$\frac{m}{n} < \frac{m' - m''}{n' - n''} < \frac{m''}{n''}.$$

Ponieważ jedynym ułamkiem Fareya między $\frac{m}{n}$ i $\frac{m''}{n''}$ jest $\frac{m'}{n'}$, więc

$$\frac{m' - m''}{n' - n''} = \frac{m'}{n'}.$$

To zaś oznacza, że punkty O, C i C' leżą na jednej prostej. Prosta ta jest równoległa do wektora $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{OB}$ i przechodzi przez punkt O. A więc jest to prosta OB. To daje zaś sprzeczność, gdyż punkt C leży **między** półprostymi OA i OB, a więc nie leży na prostej OB.

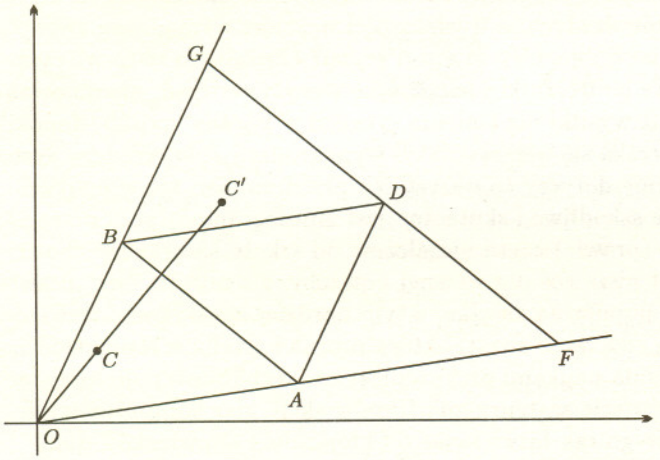
Analogicznie punkt C nie może leżeć w części zakreskowanej. Tym samym udowodniliśmy, że C należy do brzegu bądź do wnętrza równoległoboku $OBDA$.

Jeżeli $C = D$, to $n' = n + n''$, $m' = m + m''$, skąd teza. Możemy więc założyć, że $C \neq D$.

Przypuśćmy, że C leży w trójkącie ABD. Niech C' będzie obrazem C przy symetrii środkowej względem środka równoległoboku. Punkt $C' = (a,b)$ jest punktem kratowym należącym do trójkąta OAB. Powtarzając początek dowodu twierdzenia 1 otrzymujemy, że $\frac{m}{n} < \frac{b}{a} < \frac{m''}{n''}$, oraz że po sprowadzeniu do postaci nieskracalnej $\frac{b}{a}$ jest ułamkiem Fareya. Ponieważ jednak $\frac{m'}{n'}$ jest jedynym ułamkiem Fareya pomiędzy $\frac{m}{n}$ i $\frac{m''}{n''}$, więc $\frac{b}{a} = \frac{m'}{n'}$, czyli punkty O, C i C' leżą na jednej prostej. Na tej samej prostej leży środek równoległoboku, a stąd również punkt D. To zaś w połączeniu z twierdzeniem Talesa daje równość

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}.$$

Pozostał nam do rozpatrzenia przypadek, gdy C należy do trójkąta OAB (rys. 2). Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której C' (będący obrazem punktu C w jednokładności o środku O i skali k) nie należy do trójkąta OAB. Łatwo zauważyć, że C' należy do trójkąta OFG będącego obrazem trójkąta OAB w jednokładności o środku O i skali 2.



Rys. 2

W przeciwnym bowiem przypadku obraz C w jednokładności o środku O i skali $k-1$ też nie należałby do trójkąta OAB (bo $k-1 \geq k/2$), co przeczy minimalności liczby k.

Punkt C' musi należeć do jednego z przystających trójkątów: BGD, ADF, ABD. Wystarczy rozważyć tylko dwa przypadki: C' należy do $\triangle ABD$ lub C' należy do $\triangle BGD$ (przypadek, gdy C' należy do $\triangle ADF$ jest analogiczny do przypadku, gdy C' należy do $\triangle BGD$).

Jeżeli punkt C' należy do trójkąta BGD, to punkt $H = (a,b)$ – obraz punktu C' w translacji o wektor $\overrightarrow{BO}$ – należy do trójkąta OAB. Podobnie jak wyżej, można wykazać, że $\frac{m}{n} < \frac{b}{a} < \frac{m''}{n''}$ oraz $\frac{b}{a}$ (po ewentualnym skróceniu) jest ułamkiem Fareya, skąd $\frac{b}{a} = \frac{m'}{n'}$. To zaś, analogicznie jak na początku dowodu, implikuje, że punkt C leży na prostej OB – sprzeczność.

Do rozważenia pozostał tylko przypadek, gdy C' należy do trójkąta ABD. Modyfikując powyższe rozważania (odbijamy C symetrycznie względem środka równoległoboku) łatwo dochodzimy do wniosku, że O, C i D leżą na jednej prostej, skąd

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}.$$

Przywołane powyżej rynkowe porównanie możemy eksploatować szerzej zauważywszy, że dla paramagnetyka w polu magnetycznym (a więc dla naszego układu) energia spełnia równość

$$E = -MB,$$

gdzie M jest namagnesowaniem, a B indukcją pola magnetycznego. Możemy poszukać teraz maksimum funkcji $-F$, która jest sumą dwóch bogactw

$$-F = MB + TS.$$

Kandydat na Rotschilda (nasz układ fizyczny) będzie się starał tę sumę powiększyć. Składa się ona z **namagnesowania i nieporządku.** Ceną pierwszego jest **pole magnetyczne**, drugiego – **temperatura.** W procesy rynkowe może jednak wkroczyć eksperymentator zmieniając cenę jednostki namagnesowania, czyli przyłożone pole magnetyczne. Jeżeli zrobi to adiabatycznie (tak, aby spiny nie zdążyły się przeorientować), to entropia (miara nieporządku) się nie zmieni. Namagnesowanie też nie, bo jest proporcjonalne do różnicy liczby spinów w stanach 1 i 2

$$M = \mu_B((n-k)-k).$$

Maksimum sumy, które układ osiągał przy określonej proporcji cen $B:T$, może teraz być osiągnięte przy zmianie temperatury w takiej samej proporcji, w jakiej zmieniono pole magnetyczne. Gracz na giełdzie mógłby to ująć w słowach **„wzrost cen jest zaraźliwy”.** Istotnie, przy sieci wzajemnych powiązań, cechującej gospodarkę rynkową, wzrost cen jakiegoś towaru pociąga za sobą wzrost cen innych produktów. Także przeciwnie: **spadek pola magnetycznego obniża temperaturę.**

W ten sposób wyjaśniliśmy zasadę stosowanego w kriogenice chłodzenia metodą **adiabatycznego rozmagnesowania.** Włączenie pola magnetycznego, aby nie zagrzać przy tym paramagnetyka, musi się przedtem odbyć **izotermicznie** – powoli i przy dobrym kontakcie cieplnym z otoczeniem (termostatem). Zechciej, Czytelniku, zauważyć, że taki proces (spróbuj sprawdzić, że dla $T = \text{const.}$, wzrost B spowoduje wzrost M i spadek S) można widzieć jako **run na akcje, które idą w górę.** Metodą kaskady łącząc na przemian izotermiczne włączanie z adiabatycznym wyłączaniem otrzymuje się temperatury w obszarze milikelwinów. Trochę to pracochłonne, ale czyż nie zabawne?