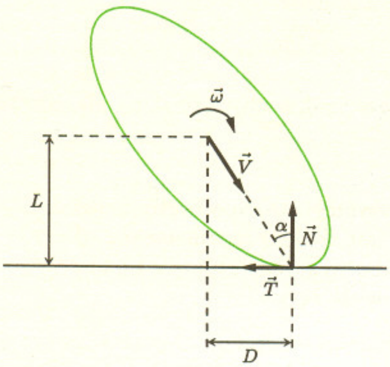
O odbiciu pewnej piłki

Arkadiusz KOWALSKI

Artykuł jest skróconą wersją pracy nagrodzonej w Pierwszym Ogólnopolskim Konkursie Uczniowskich Prac Naukowych z Fizyki.

W najprostszym przypadku odbicia piłki od przeszkody kąt odbicia jest równy kątowi padania. Najprostsze przypadki mają jednak to do siebie, że realizują się raczej rzadko. Jeżeli piłka wiruje, a powierzchnia, od której odbija się, nie jest gładka – a tak jest najczęściej – kąt odbicia różni się od kąta padania. Ma to wiele ważnych konsekwencji, o których dobrze wiedzą sportowcy i kibice. Zwyczajna piłka, taka, jakiej używają siatkarze czy tenisiści, ma kształt kuli. Istnieje jednak dyscyplina sportowa, której zawodnicy posługują się nietypową piłką o kształcie elipsoidy obrotowej (a przynajmniej my przyjmiemy, że jest to elipsoida) – jest nią rugby. Jak odbija się taka piłka i czy jej kształt ma istotny wpływ na odbicie? Spróbujmy to zbadać.

Oznaczmy przez a i b długości dużej i małej półosi piłki-elipsoidy. Piłka porusza się z prędkością $\vec{v}$ i uderza pod kątem α w płaską przeszkodę (rys. 1). Dodatkowo niech wiruje z prędkością kątową ω wokół osi równoległej do podłoża, będącej jednocześnie osią symetrii. Oznaczmy przez m masę piłki, a przez I jej moment bezwładności. Dzięki symetrii możemy rozważać zagadnienie dwuwymiarowe: odbicie od przeszkody nie elipsoidy, ale elipsy o zadanej masie i momencie bezwładności.



Rys. 1. Zderzenie elipsoidalnej piłki z płaskim podłożem.

Podczas zderzenia na piłkę działają dwie siły wpływające na jej ruch: siła reakcji podłoża $\vec{N}$ i siła tarcia $\vec{T}$. Drugą zasadę dynamiki dla składowej pędu prostopadłej do przeszkody możemy zapisać w następującej postaci

$$mv_{\perp} - mv\cos\alpha = \int\limits_0^t N(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

gdzie $v_{\perp}$ jest składową prędkości prostopadłą do przeszkody po odbiciu, t zaś jest czasem trwania odbicia. Na początek zajmijmy się sytuacją, w której nie występuje siła tarcia, czyli podłoże jest gładkie. Wtedy składowa prędkości równoległa do podłoża nie ulega zmianie. Zapiszmy teraz drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego w przypadku bez tarcia

$$I\omega_t - I\omega = \pm\int\limits_0^t D(\tau)N(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

gdzie ω_t jest prędkością kątową piłki po odbiciu, D zaś jest ramieniem siły N. Znak $+$ odpowiada rotacji prostej, znak $-$ odpowiada rotacji wstecznej. Zapiszmy jeszcze zasadę zachowania energii, która jest spełniona w przypadku, gdy tarcie nie występuje

$$\frac{1}{2}m(v\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}I\omega_t^2\,.$$

Układ równań, które otrzymaliśmy, jest mało przydatny, gdyż nic nie wiemy ani o sile reakcji podłoża, ani o jej ramieniu. Zróbmy więc upraszczające założenie, że zderzenie trwa na tyle krótko, że ramię siły reakcji w tym czasie się nie zmienia. Jeśli D jest stałe, szczegółowa wiedza na temat siły reakcji nie jest potrzebna. Wartość jej ramienia możemy obliczyć znając geometrię zderzenia. Rozwiązując układ równań otrzymujemy

$$v_{\perp} = \frac{mD^2 - I}{mD^2 + I}v\cos\alpha - 2\omega D\frac{I}{mD^2 + I}\,.$$

Jeśli przyjmiemy, że w trakcie zderzenia ruchy piłki w kierunkach prostopadłym i równoległym do przeszkody są niezależne, co na ogół jest założeniem sensownym, to istnienie lub nieistnienie siły tarcia nie wpływa na wartość prędkości $v_{\perp}$. Pozostaje nam zatem wyznaczenie składowej prędkości równoległej do przeszkody $v_{\parallel}$ po odbiciu.

Siła tarcia jest proporcjonalna do nacisku wywieranego przez piłkę na podłoże, a zatem

$$T(t) = \mu N(t)\,.$$

Rozważymy dwa przypadki: pierwszy, gdy ruch piłki w kierunku równoległym do przeszkody nie ustanie (na skutek działania tarcia) w trakcie zderzenia oraz drugi, gdy ruch ten ustanie. W pierwszym przypadku druga zasada dynamiki Newtona dla składowej ruchu równoległej do przeszkody ma postać

$$mv_{\parallel} - mv\sin\alpha = \int_0^t T(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

natomiast druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego określona jest wtedy równaniem

$$I_t - I\omega = \pm\int_0^t DN(\tau)\,\mathrm{d}\tau \mp \int_0^t LT(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

W drugim przypadku spełnione są równania

$$v_{\parallel} = 0\,, \qquad -mv\sin\alpha = \int_0^t T(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Jeśli ruch piłki w kierunku równoległym do przeszkody nie ustanie na skutek działania siły tarcia, przy przyjętych założeniach możemy wyznaczyć $v_{\parallel}$ i ω_t

$$v_{\parallel} = v\sin\alpha - \frac{2I\mu}{I + mD^2}(v\cos\alpha + \omega D)\,,$$

$$\omega_t = \omega - (D - L\mu)\frac{2m(v\cos\alpha + \omega D)}{I + mD^2}\,,$$

gdzie L jest ramieniem siły tarcia. W przypadku, gdy ruch piłki wzdłuż przeszkody ustaje, również można wyznaczyć obie te wielkości. Są one równe

$$v_{\parallel} = 0\,,$$

$$\omega_t = \omega - \frac{2Dm(v\cos\alpha + \omega D)}{I + mD^2} + \frac{Lmv\cos\alpha}{I}\,.$$

Znając ruch piłki po odbiciu możemy wyznaczyć zależność kąta odbicia od kąta padania wyznaczając D i L z geometrii zderzenia. Jest oczywiste, że

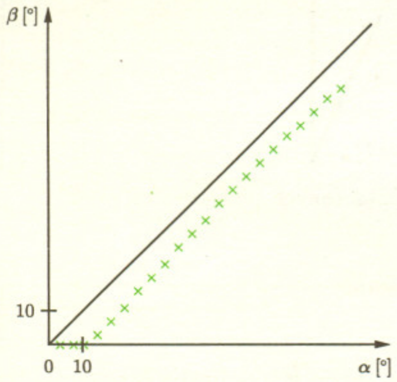
$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\,.$$

W przypadku, gdy ruch w kierunku równoległym do przeszkody nie ustaje, otrzymujemy niezwykle skomplikowany wzór

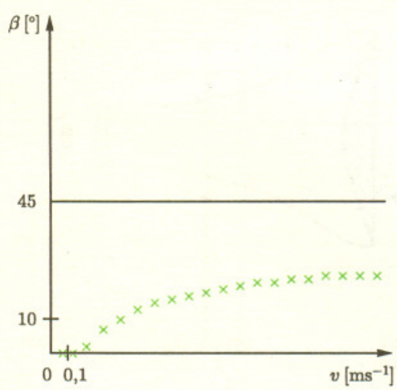
$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v(I + mD^2)\sin\alpha - 2\mu Iv\cos\alpha - 2\mu\omega ID}{v(I - mD^2)\cos\alpha + \omega ID}\,.$$

W drugim przypadku jest, oczywiście, dużo prościej, gdyż

$$\beta = 0\,.$$



Rys. 2. Zależność kąta odbicia od kąta padania w przypadku spełnienia prawa odbicia (linia ciągła) i dla piłki elipsoidalnej dla wartości parametrów opisanych w tekście (gwiazdki).



Rys. 3. Zależność kąta odbicia od prędkości padającej piłki przy ustalonym kącie padania (45°) w przypadku spełnienia prawa odbicia (linia ciągła) i dla piłki elipsoidalnej (gwiazdki) dla wartości parametrów opisanych w tekście.

Skoro wzór określający zależność kąta odbicia od kąta padania jest albo zagmatwany, albo banalny, zbadajmy tę zależność w konkretnym przypadku. W tym celu przyjmijmy: $v = 1$ m/s, $\omega = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, $m = 1$ kg, $\mu = 0{,}1$, $D = 0{,}1$ m, $I = 0{,}1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Wyniki obliczeń dla kąta α z przedziału $(0, 90°)$ przedstawia rysunek 2. Ciekawe jest też, jak zmienia się wartość kąta odbicia przy ustalonym kącie padania w zależności od wartości prędkości v. Tu przyjąłem $\mu = 0{,}3$ oraz $\alpha = 45°$, natomiast pozostałe parametry są takie jak poprzednio. Wyniki przedstawia rysunek 3. Można także postawić inne pytania, na przykład: kiedy spełnione jest prawo odbicia mówiące, że kąt odbicia jest równy kątowi padania?

Przedstawiony przeze mnie model odbicia elipsoidalnej piłki od płaskiej przeszkody jest bardzo uproszczony, pokazuje jednak, jak skomplikowany jest opis zderzenia, gdy nie zaniedba się sił tarcia, a ciało uderzające w płaską przeszkodę nie jest sferycznie symetryczne.