Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1995

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z matematyki nr 299, 300

Redaguje Marcin E. KUCZMA

299. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których suma

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}\,]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

jest liczbą całkowitą. (Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.)

300. Zbiór $S \subset \mathbf{R}$ jest sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych (długości dodatniej, skończonej), parami rozłącznych. Dowieść, że dla każdej funkcji ciągłej $f\colon S \to S$ istnieje niepusty zbiór $A \subset S$ spełniający równość $f(A) = A$.

Zadanie **300** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1994

Przypominamy treść zadań:

291. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, dla których $x^2 + 19x + 94$ jest kwadratem liczby całkowitej.

292. Udowodnić, że dla każdych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0; \pi/4)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} x_n} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}\,.$$

291. Mamy rozwiązać w liczbach całkowitych x, y $(y \ge 0)$ równanie $x^2 + 19x + 94 = y^2$, równoważne następującemu:

$$(2y)^2 - (2x+19)^2 = 15$$

– czyli $(u+v)(u-v) = 15$, gdzie $u = 2y \ge 0$, $v = 2x + 19$.

Rozważając wszystkie rozkłady liczby 15 na iloczyn dwóch czynników całkowitych znajdujemy cztery pary (u,v) $(u \ge 0)$ spełniające to równanie: $(8,7)$, $(4,1)$, $(4,-1)$, $(8,-7)$. Każda z nich wyznacza rozwiązanie (x,y) wyjściowego równania. Szukanymi wartościami niewiadomej x są (odpowiednio) liczby: -6, -9, -10, -13.

292. Podstawiając $\operatorname{tg}^2 x_i = a_i$ oraz korzystając z tożsamości $\cos^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{-1}$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, sprowadzamy dowodzoną nierówność do postaci

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \le n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}\right)^{-1} - 1\,;$$

równoważnie:

$$(*) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \le \left(1 + \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}\right)^{-1}.$$

Jeśli liczby x_i należą do przedziału $\langle 0; \pi/4)$, to liczby a_i należą do przedziału $\langle 0; 1)$. Można przyjąć, że są to liczby dodatnie (gdy któraś jest zerem, teza jest oczywista). Wykonujemy kolejne podstawienie:

$$a_i = \exp(-t_i) \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n\,; \qquad t_i \ge 0.$$

Nierówność $(*)$ przybiera postać

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(1 + \exp(-t_i)\Big)^{-1} \le \left(1 + \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\right)^{-1}.$$

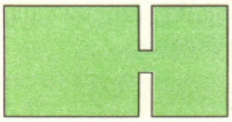
Jest to więc po prostu nierówność Jensena dla funkcji $f(t) = (1 + \exp(-t))^{-1}$, wklęsłej w przedziale $\langle 0; \infty)$ (o czym łatwo się przekonać obliczając jej pochodną pierwszego i drugiego rzędu).

Zadania z fizyki nr 197, 198

Redaguje Jerzy B. BROJAN

197. Statek kosmiczny o masie m zaopatrzony jest w lustro odbijające światło. Jeśli na to lustro pada prostopadle wiązka światła z nieruchomego lasera o mocy P, to po jakim czasie statek zostanie rozpędzony ze spoczynku do prędkości v równej połowie prędkości światła? Siła grawitacji ani opory ruchu w zadaniu nie występują.

198. Szczelne naczynie z gazem jest przedzielone na dwie części o nierównych objętościach (rys. 1) i izolowane termicznie. Grzałka elektryczna dostarcza do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła Q. W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej:
a) gdy podgrzejemy gaz w mniejszej części naczynia,
b) gdy podgrzejemy gaz w większej części naczynia,
c) gdy połowę ciepła dostarczymy mniejszej części, a połowę – większej?
Ciśnienie odczytujemy, zanim temperatury w obu częściach naczynia się wyrównają.



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 183 (WT=2,91) i 184 (WT=2,65) z numeru 9/1994

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	41,74
Tomasz Wietecha	– Tarnów	40,49
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	38,48
Aleksander Surma	– Myszków	25,32
Dariusz Wilk	– Rzeszów	20,18
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	17,55
Przemysław Gworys	– Częstochowa	14,61

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1994

Przypominamy treść zadań:

189. Gdy włączono rotacyjną pompę próżniową, ciśnienie pod kloszem spadło w czasie $t_1 = 30$ s od ciśnienia atmosferycznego $p_{\rm atm}$ do wartości $\frac{1}{2}p_{\rm atm}$. Po długim czasie praca pompy doprowadziła do obniżenia ciśnienia do wartości $p_k = (1/100)p_{\rm atm}$; niższego ciśnienia nie udało się osiągnąć ze względu na nieszczelności klosza. Jeśli pompę wyłączyć, to po jakim czasie dopływ powietrza przez nieszczelności spowoduje wzrost ciśnienia do $\frac{1}{2}p_{\rm atm}$?

190. Ocenić orientacyjnie maksymalną wysokość, na jaką może się wzbić latawiec o powierzchni płatu $S = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$ i masie $m = 400$ g uwiązany na lince o masie na jednostkę długości $\sigma = 10$ g/m, jeśli prędkość wiatru wynosi $v = 15$ m/s. Gęstość powietrza jest równa $\varrho = 1{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$.

189. W rotacyjnej pompie próżniowej – podobnie jak w tłokowej – gaz wypełnia wolną przestrzeń komory roboczej, która zwiększa swoją objętość, po czym następuje zamknięcie otworu wlotowego. Ilość gazu (liczba moli) $\mathrm{d}n$ odpompowana w czasie $\mathrm{d}t$ jest więc proporcjonalna do ciśnienia p panującego wewnątrz klosza. Ponieważ zmiana ciśnienia $\mathrm{d}p$ jest z kolei proporcjonalna do $\mathrm{d}n$ (zmiany temperatury pomijamy), więc

$$\mathrm{d}p = -\lambda p\,\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

gdzie λ – stała zależna od wydajności pompy i objętości klosza. Rozwiązaniem tego równania jest $p = p_{\rm atm}\mathrm{e}^{-\lambda t}$, a stąd nietrudno powiązać stałą λ z danym czasem t_1:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_1}\,. \tag{2}$$

Dopływ powietrza przez nieszczelności można pominąć w początkowej fazie odpompowywania, ale dalej jego rola rośnie. Jeśli przyjmiemy, że dopływ jest proporcjonalny do różnicy ciśnień $p_{\rm atm} - p$, to wynikający z niego wzrost ciśnienia jest równy

$$\mathrm{d}p = \gamma(p_{\rm atm} - p)\,\mathrm{d}t\,, \tag{3}$$

gdzie γ – stała zależna od nieszczelności i objętości klosza. W stanie równowagi, gdy ciśnienie osiągnie minimalną wartość p_k, suma przyrostów opisanych równaniami (1) i (3) jest równa zeru, skąd wynika

$$\gamma = \frac{\lambda p_k}{p_{\rm atm} - p_k} \approx \frac{\lambda p_k}{p_{\rm atm}}\,. \tag{4}$$

Po odłączeniu pompy wzrost ciśnienia jest dany równaniem (3). Rozwiązując je znajdujemy

$$p = p_{\rm atm} - (p_{\rm atm} - p_k)\mathrm{e}^{-\gamma t} \approx p_{\rm atm}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t})\,.$$

Ciśnienie wzrośnie do wartości $\frac{1}{2}p_{\rm atm}$ po czasie t_2, który wyznaczymy z warunku $\mathrm{e}^{-\gamma t_2} = \dfrac{1}{2}$, czyli $t_2 = \gamma^{-1}\ln 2$, a po podstawieniu równań (2) i (4) mamy

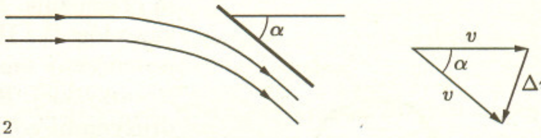
$$t_2 \approx t_1\frac{p_{\rm atm}}{p_k} = 3000\ \mathrm{s} = 50\ \mathrm{min}\,.$$

Odnotujmy jeszcze, że typowe pompy rotacyjne osiągają ciśnienia rzędu 1 Pa, zatem ograniczenia technologiczne (parowanie oleju itp.) nie mają istotnego wpływu na równowagową wartość ciśnienia p_k.

190. Siłę działającą na latawiec obliczymy ze wzoru

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta\vec{v}\,,$$

gdzie $\mathrm{d}m$ – masa powietrza, które w czasie $\mathrm{d}t$ zmieniło prędkość o $\Delta\vec{v}$.



Rys. 2

Załóżmy, że płat nośny jest ustawiony pod kątem α do poziomu, a strumień powietrza o przekroju poprzecznym $S\sin\alpha$ trafiając na płat zmienia kierunek o ten kąt nie zmieniając wartości prędkości (rys. 2).

Te założenia mogą budzić wątpliwości; poza tym dla dużych kątów α nie jest pewne, czy cała masa $\mathrm{d}m$ ulegnie odchyleniu w dół (a nie w bok lub nawet w górę). Dlatego dalej należałoby przyjąć, że kąt α jest niezbyt duży – np. mniejszy niż 45°.

Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \varrho v S\sin\alpha\,, \quad \Delta v = 2v\sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

zatem

$$F = \varrho v^2 S\cdot 2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

a kierunek siły $\vec{F}$ jest zgodny z kierunkiem wektora $\Delta\vec{v}$, czyli tworzy z pionem kąt $\alpha/2$. Aby znaleźć siłę $\vec{N}$ działającą na linkę, wystarczy odjąć od $\vec{F}$ ciężar latawca, tzn.

$$N_x = F_{\rm poz} = F\sin\frac{\alpha}{2} = 2\varrho v^2 S\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$N_y = F_{\rm pion} - mg = F\cos\frac{\alpha}{2} - mg = \varrho v^2 S\sin^2\alpha - mg\,.$$

Ocena wysokości latawca wymaga uwzględnienia wpływu ciężaru linki i działającej na nią siły wiatru na jej kształt; jeśli dla uproszczenia siłę wiatru pominiemy, to linka ma kształt linii łańcuchowej (wykresu cosinusa hiperbolicznego). Zauważmy tu, że gdy latawiec jest na maksymalnej możliwej wysokości, to przy dolnym końcu linka jest pozioma. Można sprawdzić, że dla linki poziomej na dole, a na górze napiętej siłą o składowych N_x i N_y wysokość jest równa

$$h = \frac{1}{\sigma g}\left(\sqrt{N_x^2 + N_y^2} - N_x\right)\,.$$

Numeryczna analiza otrzymanego wyrażenia prowadzi do wniosku, że przy danej wartości parametru $mg/(\varrho v^2 S) = 0{,}0268$ maksimum jest osiągane dla kąta α wynoszącego 73°; wtedy $h = 0{,}44\varrho v^2 S/(\sigma g) = 655$ m. Wyniku tego nie można jednak uważać za dokładny ze względu na niezbyt dobrą stosowalność wspomnianych uprzednio przybliżeń do tak dużych wartości α; ponadto siła oporu powietrza działająca na latawiec i linkę „przygina” latawiec do ziemi, czyli rzeczywiste h będzie mniejsze od wyliczonego. Orientacyjnie można przyjąć $h \approx 400$ m.