Dajcie mi grant, a poruszę Ziemię

Ian STEWART

Rozwiązanie zadania M 735. Pole rzutu sześcianu S stanowi, oczywiście, połowę sumy pól rzutów wszystkich ścian sześcianu, a więc jest równe sumie pól rzutów trzech ścian o wspólnym wierzchołku. Rozważmy układ współrzędnych, w którym ten wierzchołek ma współrzędne (0,0,0), wspólne zaś krawędzie owych trzech ścian zawierają się w osiach układu. Wówczas pole rzutu ściany zawartej w płaszczyźnie $x = 0$ na płaszczyznę o równaniu $ax + by + cz = 0$ wynosi $|a|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Zatem

$$S = \frac{|a|+|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Oczywiście, $S \geq 1$, bo $S^2 \geq 1$, a z drugiej strony

$$S = \frac{[|a|,|b|,|c|] \circ [1,1,1]}{|[|a|,|b|,|c|]|} = |[1,1,1]| \cdot \cos\alpha \leq \sqrt{3},$$

gdzie α oznacza kąt między wektorami $[|a|,|b|,|c|]$ i $[1,1,1]$.

Jakie oszacowanie można podać na pole rzutu prostokątnego czworościanu foremnego o objętości 1?

****

Prof. Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej
Uniwersytet w Syrakuzach

Komitet Badań Naukowych
Zespół Metalurgii
Aleksandria

Wniosek o sfinansowanie projektu badawczego nr KBN/MET/778/0043

Temat projektu: Analiza wykrywalności obecności metali nieszlachetnych w próbkach złota i srebra.

Wymagane wyposażenie: Wykładany marmurem zbiornik hydrostatyczny z zainstalowanymi dwoma zaworami wodnymi (zawór wysokich temperatur, zawór niskich temperatur) i jednym odpływem; jeden korek.

Kosztorys (w drachmach)	
Aparatura	276
Materiały i przedmioty nietrwałe (woda, mydło, ręczniki)	115
Inne koszty bezpośrednie (ogrzewanie)	98
OGÓŁEM	489
Wynagrodzenia	400
KOSZTY BEZPOŚREDNIE OGÓŁEM	889
Koszty pośrednie $42\frac{1}{2}$%	382
KOSZTY OGÓŁEM	1271

****

Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Hipnarchus ze Smyrny
Prezes Cechu Złotników

Drogi Narku,
Jakiś facet z matematyki w Syrakuzach przysłał mi podanie o grant. Wydaje mi się, że to coś z Twojego podwórka. Byłbym wdzięczny za szybką recenzję, bo termin mija za miesiąc.

Hipokrytes

****

Rozwiązanie zadania M 736. Niech m będzie najmniejszą spośród liczb zapisanych na szachownicy. Jak łatwo zauważyć, na wszystkich sąsiednich polach też musi znajdować się liczba m. Prowadząc dalej to rozumowanie stwierdzamy, że na wszystkich polach szachownicy napisano liczbę m. W zależności od tego, czy $m = 1995$, spełniony jest jeden lub drugi z wariantów tezy.

Czy teza zadania pozostanie prawdziwa, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy słowo „naturalne" przez „dodatnie"?

Rozwiązanie zadania F 403. Gęstość ładunku powierzchniowego σ obliczamy z prawa Gaussa zastosowanego do cienkiej warstwy zawierającej powierzchnię Ziemi

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E_0 \approx -1{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}.$$

Całkowity ładunek Ziemi wynosi więc

$$Q = 4\pi R^2 \cdot \sigma \approx -6{,}7 \cdot 10^5\ \mathrm{C}.$$

Aby znaleźć średnią gęstość objętościową wypadkowego ładunku w powietrzu do wysokości 100 m, rozważmy pionowy cylinder o polu przekroju A, pomiędzy poziomami 0 i 100 m. Z prawa Gaussa zastosowanego do tego cylindra otrzymujemy

$$\varepsilon_0[A \cdot E(0) - A \cdot E(100)] = \\ = q_{\mathrm{wewn.walca}} = V\,\overline{\varrho}_q,$$

gdzie $\overline{\varrho}_q$ to średnia gęstość objętościowa ładunku w walcu. Dostajemy więc

$$\overline{\varrho}_q = \frac{\varepsilon_0[E(0) - E(100)]}{100} \approx \\ \approx 4{,}4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C/m^3}.$$

Rozważmy teraz przewód o n nośnikach prądu w jednostce objętości, każdy o ładunku e. Niech poruszają się one z prędkością v. Wtedy przez jednostkową powierzchnię tego przewodu przepływa prąd o wartości natężenia $j = n \cdot e \cdot v$. W polu Ziemi tylko ładunki dodatnie docierają do jej powierzchni zmieniając jej ładunek (przy założeniu braku innych źródeł ładunku). Więc

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = j_+ = n_+ \cdot e \cdot v = \\ = 1{,}44 \cdot 10^{-14} \cdot E\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vsm}}.$$

Przy powierzchni Ziemi mamy, oczywiście, $E = E_0 = -\sigma/\varepsilon_0$, dostajemy więc równanie zaniku ładunku

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -1{,}44 \cdot 10^{-14}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\sigma}{600\ \mathrm{s}},$$

którego rozwiązaniem jest $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = 600$ s. Dla $\sigma(t) = \sigma_0/2$ dostajemy czas połowicznej neutralizacji ładunku Ziemi $t = \tau \cdot \ln 2 \approx 415\ \mathrm{s} \approx 7$ min.

Hipnarchus ze Smyrny
Prezes Cechu Złotników, Srebrników,
Brązowników i Zawodów Stowarzyszonych

Dr Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Recenzja projektu badawczego nr KBN/MET/778/0043

Szanowny Panie Doktorze,

Po uważnym przestudiowaniu projektu stwierdzam, że nie przedstawia on wielkiej wartości. Co prawda, lista publikacji kierownika projektu jest dosyć długa, ale wygląda na to, że nie ma wiele wspólnego z tematem badań. Trudno mi dostrzec, jaki związek ma teoretyczna analiza objętości sfery czy też numerologia ziaren piasku z fałszowaniem złota metalami nieszlachetnymi. Sugeruję wstrzymanie się z finansowaniem projektu do czasu wyjaśnienia metodologii.

Hipnarchus ze Smyrny

[*odręczny dopisek*]
Hipku, ten gość jest stuknięty. Wywal to.

****

Od: Krollikis
Do: Kleopatka

Kleo, skarbie, pchnij do tego Archomenidesa formularz z prośbą o uzupełnienie danych.

****

Komitet Badań Naukowych
Aleksandria

Prof. Archimedes
Uniwersytet w Syrakuzach

Projekt badawczy nr KBN/MET/778/0043

Szanowny Panie Profesorze,

Ze względu na prośbę naszych recenzentów będziemy zobowiązani za nadesłanie nam bardziej szczegółowego wyjaśnienia metod, które zamierza Pan zastosować.

Hipokrates
(*podpisane*): z up. Kleopasta

****

Apoloniusz
Instytut Matematyki Teoretycznej

Drogi Apoloniuszu, mam problemy z podaniem o grant. Tak naprawdę, to chcę używać tego zbiornika hydrostatycznego jako wanny. Jak wiesz, w kąpieli przychodzą mi do głowy najlepsze pomysły. Wątpię jednak, czy takie uzasadnienie zadowoli KBN. Masz doświadczenie w pisaniu takich podań; co mi doradzisz?

Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej

****

Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej

Drogi Arku, z dnia na dzień jest coraz gorzej. Ja też mam kłopoty. Nikt nie wierzy w możliwość jakiegokolwiek zastosowania krzywych stożkowych; mogą mi nie odnowić w tym roku mojego trzyletniego grantu. Wam, „stosowanym”, jest łatwiej. Spróbuj im wcisnąć jakiś kit.

Apoloniusz
Instytut Matematyki Teoretycznej

****

Prof. Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej
Uniwersytet w Syrakuzach

Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Szanowny Panie Doktorze,

W nawiązaniu do Pańskiego listu z dn. 23. bm.; proponowana metodologia jest uogólnieniem technik badawczych wprowadzonych przez wielkiego złotnika babilońskiego Habberkaddaszera (Proc. Babyl. Acad. Sci. 93 (337 p.n.e.) 173–224), w połączeniu z moją własną koncepcją framnifikacji gramnulatów bozwolpianowych poddanych bombardowaniu neutrinami. Mam nadzieję, że to wyjaśnia wszelkie wątpliwości.

Archimedes

****

Od: Krollikis
Do: Kleopatka Kleo, kochanie, poślij to do dziadka Pryszcza w Smyrnie.

****

Hipnarchus ze Smyrny
Prezes Cechu ZSBZS

Dr Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Recenzja uzupełnienia projektu badawczego nr KBN/MET/778/0043

Przedstawiona propozycja jest ewidentnie nierealistyczna i oparta na zasadach od dawna uznanych za nie związane z tematem. Uważam, że projekt należy odrzucić.

Hipnarchus ze Smyrny

[*odręczny dopisek*]
Hipku, nie rozumiem z tego ani słowa, a jestem ekspertem, więc to muszą być bzdury.

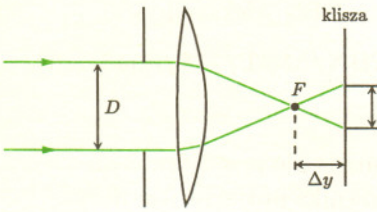
****

Od: Króliczek
Do: Kleopatka

Kleo, złotko, załatw odmownie tego całego Akrymoniusa z US. Stokrotne dzięki. Przy okazji, czy jesteś wolna w czwartek wieczorem?

****

Rozwiązanie zadania F 404. Dla uproszczenia przyjmijmy, że obiektyw zbudowany jest z soczewki skupiającej o ogniskowej f i umieszczonej przed nią przesłony z kołowym otworem o średnicy D.



Rozważmy wiązkę promieni równoległych do osi optycznej, padających na soczewkę. Jeśli klisza filmowa znajduje się w odległości Δy od ogniska soczewki, powstanie na niej obraz o średnicy

$$a = \frac{D}{f}\Delta y\,.$$

Gdyby światło stosowało się ściśle do praw optyki geometrycznej, to umieszczając kliszę w ognisku otrzymalibyśmy obraz punktowy. Tak jednak nie będzie, gdyż ze względu na dyfrakcję na przesłonie otrzymamy plamkę o średnicy

$$b = 2\alpha\frac{\lambda f}{D}\,,$$

gdzie α jest liczbą bliską jedności. Umieszczenie kliszy dokładnie w ognisku daje rozmycie dyfrakcyjne, poza ogniskiem wpływ dyfrakcji nie jest istotny, ale pojawia się rozmycie geometryczne. Odsuwając kliszę o Δy od ogniska nie pogarszamy jakości obrazu, jeśli tylko rozmycie geometryczne nie stanie się zbyt duże. Oznacza to, że a nie może być większe niż b, jeśli nie chcemy pogorszyć jakości obrazu. Z warunku $a = b$ otrzymujemy

$$\Delta y = 2\lambda\left(\frac{f}{D}\right)^2$$

(stałą α zastąpiliśmy jedynką). Na zdjęciu jednakowo ostry będzie odległy obiekt (znajdujący się w nieskończoności), jak i obiekt w odległości x danej równaniem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{f+\Delta y} = \frac{1}{f}\,.$$

Uwzględniając, że $\Delta y \ll f$ dostajemy

$$x = \frac{D^2}{2\lambda} = \frac{f^2}{2\lambda}\left(\frac{D}{f}\right)^2.$$

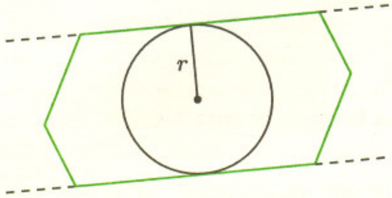
Dla pełnego otworu przesłony dostajemy

$$x = 725\ \mathrm{m}\,.$$

Dla maksymalnie przysłoniętego obiektywu mamy

$$x = 11\ \mathrm{m}\,.$$

Rozwiązanie zadania M 737. Niech r oznacza odległość między środkiem symetrii wielokąta W i jego brzegiem, czyli promień największego spośród zawartych w W kół o środku w środku symetrii. Koło to jest styczne do co najmniej jednego z boków wielokąta W, a stąd także do drugiego boku będącego obrazem pierwszego w symetrii względem środka symetrii W. Przedłużając te dwa boki otrzymamy żądane proste. Istotnie, odległość każdej z nich od środka symetrii W jest równa r, szerokość pasa pomiędzy nimi wynosi $2r$. Teraz wystarczy wykazać, że $r \leq 1$. Szacując pole koła przez pole wielokąta W mamy $\pi r^2 < 3 < \pi$, więc $r < 1$.



Czy w sformułowaniu zadania można pominąć założenie o środkowej symetrii W?

Komitet Badań Naukowych
Aleksandria

Prof. Archimedes
Uniwersytet w Syrakuzach

Projekt badawczy nr KBN/MET/778/0043

Szanowny Panie Profesorze,

Z przykrością informuję, że po dokładnej analizie Pańskiego wniosku recenzenci stwierdzili, że nie spełnia on wymogów stawianych projektom badawczym dofinansowywanym przez Komitet.

Hipokrates
(*podpisane*): z up. Kleopasta

Do wiadomości:
Diplodonkus, Dziekan Wydziału Matematyczno-Fizycznego Uniwersytetu w Syrakuzach
Kierownik Działu Finansowania Badań Naukowych, Uniwersytet w Syrakuzach

****

Dziekan
Diplodonkus

Anarchimonius
Przewodniczący Komisji
ds. Awansów i Zatrudnienia

Szanowny Panie Profesorze,

Zauważyłem, że w przyszłym miesiącu Komisja rozpatruje przedłużenie zatrudnienia dr. hab. Archimedesa. Pragnę zauważyć, że jego podanie o grant KBN zostało odrzucone. Jak Pan wie, Rektor uważa za sprawę niezwykłej wagi utrzymanie wysokiego poziomu badań na naszej uczelni, co oznacza, że uniwersytet powinien zatrudniać jedynie naukowców tak wysokiej klasy, by zapewnić dopływ dużych funduszy. Sądzę, że powinien Pan wziąć pod uwagę zalecenia Kolegium Rektorskiego, choć, oczywiście, nie jest moją intencją wtrącanie się w sprawę dr. hab. Archimedesa...

****

Przekład: *Krzysztof CIESIELSKI i Marcin POŹNIAK*

Od Redakcji. Można się zastanawiać, czy w zamieszczonym tekście Iana Stewarta należało tłumaczyć angielską nazwę *National Science Foundation* na *Komitet Badań Naukowych.* W końcu każdy, kto choć trochę zna angielski (albo po prostu ma pod ręką słownik), stwierdzi, że dosłowny odpowiednik polski to nie *Komitet Badań Naukowych*, lecz *Narodowa Fundacja Nauki.*

Tłumaczenie nie polega jednak na mechanicznym zastępowaniu słów jednego języka ich wyszukanymi w słowniku odpowiednikami w drugim języku. Umberto Eco, chcąc ukazać śmieszność takiej procedury, pisał o kimś, kto włoskie *Lo spirito è pronto ma la carne è debole* (duch ochoczy, ale ciało mdłe) przetłumaczył za pomocą słownika na angielski jako coś w rodzaju *whisky nie brak, ale mięso nieświeże.* Wydaje się więc, że tłumacze dokonali wyboru właściwego. Polski Czytelnik tego tłumaczenia może, podobnie jak amerykański czytelnik *Intelligencera*, pomyśleć z rozbawieniem (lub goryczą):

A to ci zbieg okoliczności, nadęta firma, z którą boryka się Archimedes, nazywa się tak samo, jak największa w moim kraju instytucja przyznająca granty na badania naukowe.

O ile nam wiadomo, będzie to w pełni zgodne z intencją Iana Stewarta.

Mamy ponadto nadzieję, że nikt rozsądny o przypadkową zbieżność nazw obrażać się nie będzie. W końcu Archimedes nie żyje od ponad 2200 lat, a swoje podania o grant pisał w Aleksandrii. Zarówno amerykańska *National Science Foundation*, jak i polski *Komitet Badań Naukowych* są zaś instytucjami dwudziestowiecznymi, z Aleksandrią i Archimedesem nie mającymi, Drogi Czytelniku, nic wspólnego...