Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1995

Zadania z matematyki nr 297, 298

Redaguje Marcin E. KUCZMA

297. Czy istnieje permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_{250})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 250\}$ o tej własności, że dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, 249\}$ suma $x_1 + \ldots + x_k$ dzieli się przez x_{k+1}?

298. Dowieść, że dla wszystkich liczb $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ z przedziału $\langle -1; 1\rangle$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \geq \left| \prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \right| .$$

Zadanie **298** zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1994

Przypominamy treść zadań:

289. W pewnej grupie ludzi żadna para osób znających się wzajemnie nie ma żadnego wspólnego znajomego, natomiast każda para osób nie znających się wzajemnie ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Dowieść, że każda osoba w tej grupie ma tyle samo znajomych.

290. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n). Określamy ciąg (b_n) wzorem $b_n = \left(\dfrac{1+a_n}{a_{n-1}}\right)^n$. Wykazać, że ciąg (b_n) nie może być zbieżny do granicy mniejszej od e.

289. Niech M będzie osobą mającą maksymalną liczbę znajomych (oznaczmy tę liczbę przez m) i niech N będzie jednym spośród tych znajomych, dowolnie wybranym; pozostałych nazwijmy $P_1, \ldots, P_{m-1}$. Dla każdego numeru i $(1 \leq i \leq m-1)$, w myśl warunku zadania, N i P_i nie znają się wzajemnie, a więc mają dokładnie jednego znajomego Q_i różnego od M.

Przypuśćmy, że dla pewnych numerów i, j $(1 \leq i < j \leq m-1)$ symbole Q_i, Q_j oznaczają tę samą osobę Q. Wówczas N, P_i, P_j są wspólnymi znajomymi osób M i Q – wbrew warunkowi zadania. Wobec tego N ma m *różnych* znajomych: $M, Q_1, \ldots, Q_{m-1}$; ma ich zatem dokładnie m (wobec maksymalności m).

Tak więc każdy znajomy pana (pani?) M zna m osób. Weźmy teraz pod uwagę dowolną osobę R, nie znającą M. Istnieje wówczas osoba N (a nawet dwie takie osoby), będąca wspólnym znajomym M oraz R. Już wiemy, że także N ma m znajomych. Można więc powtórzyć rozumowanie: rolę M przejmuje N, a rolę N przejmuje R. Wniosek: również R ma m znajomych. Wobec dowolności wyboru R kończy to dowód.

290. Oznaczając $x_n = a_n/n$ mamy

$$b_n = \left(\frac{1+nx_n}{(n-1)x_{n-1}}\right)^n = c_n e_n ,$$

gdzie

$$c_n = \left(\frac{1+nx_n}{nx_{n-1}}\right)^n = \left(\frac{(1/n)+x_n}{x_{n-1}}\right)^n, \qquad e_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e} .$$

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że $\lim b_n < \mathrm{e}$. Wówczas $\lim c_n < 1$, a więc dla wszystkich n większych od pewnego numeru n_0 zachodzi nierówność $c_n < 1$. Wobec tego

$$x_n = c_n^{1/n} x_{n-1} - \frac{1}{n} < x_{n-1} - \frac{1}{n} \qquad \text{dla} \quad n > n_0 .$$

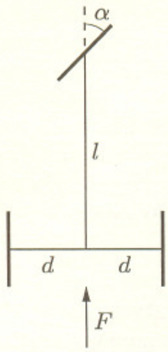
Stąd przez indukcję

$$x_n < x_{n_0} - \left(\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{dla} \quad n > n_0 .$$

A skoro wszystkie liczby x_n są dodatnie, uzyskana nierówność nie da się pogodzić z rozbieżnością szeregu harmonicznego $\sum(1/n)$. Sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Zadania z fizyki nr 195, 196

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

195. Tylne koła trójkołowego rowerka dziecinnego są osadzone na wspólnej osi, więc gdy rowerek skręca, co najmniej jedno z nich musi się ślizgać po podłożu. Jaką siłą F trzeba działać na taki rowerek, aby ruszył z miejsca (rys. 1)?

Dane: Wzajemna odległość tylnych kół $2d$; odległość osi kierownicy (przyjmijmy dla uproszczenia, że jest pionowa) od tylnej osi l; szukana siła jest skierowana wzdłuż tego odcinka, a środek masy znajduje się w jego połowie; kąt skręcenia przedniego koła α; masa rowerka m; jednakowy współczynnik tarcia statycznego i kinetycznego kół o podłoże μ.

196. Objaśnić, dlaczego zwykła żarówka oświetleniowa nie nadaje się do wykorzystania w rzutnikach i reflektorach. Dlaczego żarówki do rzutników są zasilane niższym napięciem niż żarówki oświetleniowe tej samej mocy?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1994

Przypominamy treść zadań

187. W jednostce objętości powietrza znajdowało się n_A jonów A^+, n_B jonów B^+, n_X jonów X^- i n_Y jonów Y^-. Jeśli współczynniki rekombinacji są jednakowe dla każdej pary jonów, to ile przybyło po długim czasie cząsteczek AX, ile – cząsteczek AY, ile BX, a ile BY? Wskazówka: Liczba par jonów ulegających rekombinacji w jednostce czasu jest proporcjonalna do iloczynu koncentracji jonów dodatnich i ujemnych danego rodzaju, a stała proporcjonalności nazywa się współczynnikiem rekombinacji.

188. Precyzyjny woltomierz wielozakresowy dołączono do dwóch punktów A i B pewnego obwodu liniowego. Gdy woltomierz był nastawiony na zakres 10 V, wskazywał 8,92 V, a gdy przestawiono go na zakres 30 V, jego wskazanie wzrosło do 9,04 V. Jakie napięcie występowało między A i B przed dołączeniem woltomierza?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 181 (WT=2,50) i 182 (WT=3,78) z numeru 8/1994

Tomasz Wietecha	– Tarnów	40,49
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	39,12
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	38,48
Aleksander Surma	– Myszków	23,99
Dariusz Wilk	– Rzeszów	20,18
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	13,45
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	13,05
Przemysław Gworys	– Częstochowa	12,44

187. Zależność liczby jonów A^+ od czasu opisuje równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}n_A}{\mathrm{d}t} = -\alpha n_A n_X - \alpha n_A n_Y \qquad \text{albo} \qquad \frac{\mathrm{d}(\ln n_A)}{\mathrm{d}t} = -\alpha(n_X + n_Y)\,,$$

gdzie α jest uniwersalnym (zgodnie z założeniem) współczynnikiem rekombinacji. Prawa strona drugiego równania jest jednakowa dla jonów A^+ i B^+, skąd nietrudno wyciągnąć wniosek, że stosunek liczby tych jonów pozostaje stale taki, jak na początku. W podobny sposób dowodzi się stałości ilorazu n_X/n_Y. Oznaczmy liczbę powstałych cząsteczek AX przez n_{AX}; z równań

$$\frac{\mathrm{d}n_{AX}}{\mathrm{d}t} = \alpha n_A n_X \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}n_{AY}}{\mathrm{d}t} = \alpha n_A n_Y$$

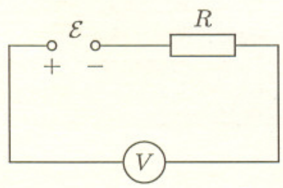
wynika, że $\frac{n_{AX}}{n_{AY}} = \frac{n_X}{n_Y} = \text{const.}$ Tak samo $\frac{n_{BX}}{n_{BY}} = \frac{n_X}{n_Y} = \text{const.}$ oraz $\frac{n_{AX}}{n_{BX}} = \frac{n_A}{n_B} = \text{const.}$ Załóżmy dalej, że np. jonów ujemnych było więcej; wtedy wszystkie jony dodatnie uległy rekombinacji, czyli $n_A = n_{AX} + n_{AY}$, $n_B = n_{BX} + n_{BY}$ (wielkości po lewej stronie odnoszą się tu do stanu początkowego, a wielkości po prawej – do końcowego). Otrzymujemy wynik

$$n_{AX} = \frac{n_A n_X}{n_X + n_Y}\,, \quad n_{AY} = \frac{n_A n_Y}{n_X + n_Y}\,, \quad n_{BX} = \frac{n_B n_X}{n_X + n_Y}\,, \quad n_{BY} = \frac{n_B n_Y}{n_X + n_Y}\,.$$

Jeśli na początku więcej było jonów dodatnich, to wyrażenie $n_X + n_Y$ w mianownikach należy zastąpić przez $n_A + n_B$.

188. Posłużmy się twierdzeniem Thévenina, zgodnie z którym „z punktu widzenia woltomierza" obwód można zastąpić źródłem napięcia o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ (jej wyznaczenie jest celem zadania) z dołączonym szeregowo opornikiem R (rys. 2). Woltomierz o oporze wewnętrznym R_w wskazuje więc napięcie

$$U = \frac{\mathcal{E}}{R + R_w} R_w\,.$$



Rys. 2

Zwiększenie zakresu woltomierza następuje dzięki szeregowemu dołączeniu opornika, tak że opór woltomierza wzrasta, a prąd płynący przez niego przy maksymalnym wychyleniu wskazówki pozostaje bez zmiany. Zatem przy zakresie 30 V opór wewnętrzny był trzykrotnie większy niż przy zakresie 10 V. Z układu równań

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + R_w} R_w\,, \quad U_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + 3R_w} 3R_w$$

znajdujemy

$$\mathcal{E} = \frac{3 - 1}{\frac{3}{U_2} - \frac{1}{U_1}} \approx 9{,}10 \text{ V}\,.$$