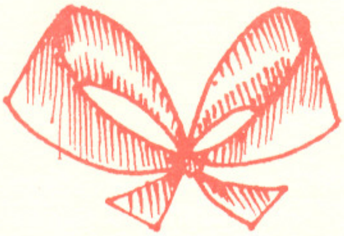
Stanisław HAŁAS, Lublin – Instytut Fizyki UMCS

Nie ma w świecie gazu doskonałego, próżni, prostokąta ani liczby e itp. Czemu więc z takim uporem o takich właśnie obiektach idealnych mówią wszystkie nauki ścisłe?



Jako fizyk-eksperymentator mam na to pytanie właściwie dwie odpowiedzi:
(1) Ponieważ prosty wzór odnoszący się do przypadku idealnego często wystarcza w praktyce, zwłaszcza w ocenach „z grubsza".
(2) Ponieważ łatwiej badać odchylenia od stanu idealnego, niż budować „od razu" model układu rzeczywistego.
Moją odpowiedź zilustruję następującymi przykładami.

Przykład z astrofizyki

Znany wzór Huyghensa na okres wahadła matematycznego,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

może służyć do oszacowania okresu pulsowania gwiazd zmiennych (cefeid). Przyjmując jako „długość wahadła" promień gwiazdy R, oraz jako przyspieszenie g wartość natężenia pola grawitacyjnego na powierzchni gwiazdy

$$g = \mathrm{G}\frac{M}{R^2},$$

gdzie M – masa gwiazdy, G – stała grawitacji, otrzymamy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathrm{G}M}}.$$

Biorąc pod uwagę, że średnia gęstość gwiazdy to $\overline{\varrho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$, wzór powyższy upraszczamy do postaci

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathrm{G}}}(\overline{\varrho})^{-1/2}. \qquad (*)$$

Wzór ten dość dobrze zgadza się z danymi obserwacyjnymi. Znaleziony tu współczynnik proporcjonalności między T a $(\overline{\varrho})^{-1/2}$ wynosi (w jednostkach centymetr-gram-doba)

$$\sqrt{\frac{3\pi}{\mathrm{G}}} = \sqrt{\frac{3\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^7}{86400}} \approx 0{,}12,$$

podczas gdy wartość znaleziona z obserwacji wynosi 0,06. Zgodność stałej we wzorze (∗) z danymi obserwacyjnymi można uzyskać przyjmując, że pulsują jedynie zewnętrzne warstwy gwiazdy ($l = R/4$, por. S.A. Kapłan, *Fizyka gwiazd*, str. 155).

Przykład z akustyki

Podstawowa fala stojąca wzbudzona w rurze o długości L zamkniętej z jednego końca jest niczym innym jak drganiem „słupa powietrza" w tej rurze. Z teorii fal stojących mamy

$$L = \frac{\lambda}{4}, \qquad (1)$$

gdzie λ jest długością fali akustycznej. Okres drgań „słupa powietrza" wynosi więc

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

gdzie c jest prędkością dźwięku w powietrzu:

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\varrho}}, \qquad (2)$$

gdzie p – ciśnienie powietrza, ϱ – jego gęstość, $\kappa = c_p/c_v$ (patrz np. W. Westphal, *Fizyka*, cz. I, str. 230).

Korzystając ze wzorów (1) i (2) otrzymujemy następujący ścisły wzór na okres drgań podstawowej fali stojącej w rurze:

$$T = 4L\sqrt{\frac{\varrho}{p\kappa}}. \qquad (3)$$

Wyprowadzenie wzoru (3) jest więc dość proste, pod warunkiem, że znamy wzór (2). Niestety, wyprowadzenie wzoru (2) nie jest łatwe i szkolne podręczniki zagadnienie to pomijają. Dlatego wyprowadzimy ten wzór w sposób mniej ścisły, ale za to bardziej poglądowy, korzystając ze „szkolnego" wzoru na okres drgań ciała o masie m pod wpływem siły sprężystej

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (4)$$

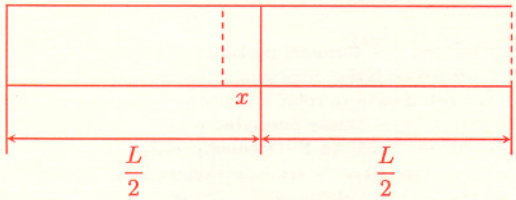
gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności między siłą F a wychyleniem x, tj. stosunek F/x. Będziemy uważać, że „masą drgającą" jest gaz zawarty w połowie rury od strony otworu, „sprężynę" zaś stanowi gaz zawarty w drugiej połowie rury (tj. od strony dna). Zatem

$$m = \frac{1}{2}L \cdot S \cdot \varrho,$$

gdzie S – pole przekroju rury, ϱ – gęstość gazu. Wyrażenie to można zapisać jeszcze zwięźlej oznaczając objętość $\frac{1}{2}LS$ przez V_0:

$$m = V_0\varrho.$$

Wartość k znajdziemy stąd, że siła sprężysta powstaje przy sprężaniu gazu zawartego w lewej połowie rury.



Jeśli „tłok", czyli gaz zawarty w prawej połowie rury, przemieści się o małą odległość x, to sprężony gaz w lewej połowie będzie nań działał siłą $F = (p - p_0)S$, gdzie p_0 – ciśnienie gazu przed sprężeniem, p – ciśnienie po sprężeniu. Mamy więc

$$k = \frac{(p - p_0)S}{x} = \frac{(p - p_0)S^2}{V - V_0}\,, \tag{6}$$

gdzie V oznacza aktualną objętość sprężonego gazu.

W przypadku szybkich drgań o częstościach akustycznych należy skorzystać z równania przemiany adiabatycznej (gaz sprężany i rozprężany dostatecznie szybko będzie wykazywał wahania temperatury, bo nie zdąży się ona wyrównać przez wymianę ciepła z otoczeniem):

$$pV^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa}\,, \tag{7}$$

gdzie κ jest stosunkiem ciepła właściwego gazu przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości, tj. c_p/c_v.

Równanie przemiany adiabatycznej (wzór 7) przepiszemy w postaci, w której wystąpi potrzebna nam różnica $V - V_0$, tj.:

$$p(V - V_0 + V_0)^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa}\,,$$

skąd

$$p\left(1 + \frac{V - V_0}{V_0}\right)^{\kappa} = p_0\,.$$

Dla małych względnych zmian objętości możemy zapisać (zgodnie ze wzorem $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, w którym po prawej stronie jest pominięty wyraz z ε^2 i wyrazy wyższych rzędów):

$$p\left(1 + \kappa\frac{V - V_0}{V_0}\right) = p_0\,. \tag{8}$$

Obliczając z powyższego równania różnicę ciśnień $p - p_0$ i podstawiając do równania (6) otrzymamy

$$k = \kappa\frac{p_0}{V_0}S^2\,. \tag{9}$$

Podstawiając za m i k do wzoru (4) wartości zgodnie z równaniami (5) i (9) otrzymujemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{V_0\varrho}{\kappa\frac{p_0}{V_0}S^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho\cdot\frac{1}{4}L^2}{\kappa p_0}} = \pi L\sqrt{\frac{\varrho}{\kappa p_0}}\,.$$

Widzimy więc, że otrzymany wynik niewiele różni się od ścisłego (wzór 3) mimo stosowania tak znacznych uproszczeń.

Powyższe przykłady podałem dla zilustrowania tezy pierwszej mojej odpowiedzi. Podobnych przykładów można znaleźć bardzo wiele, zarówno na stronicach podręczników, jak i w publikacjach naukowych (zwłaszcza w początkowych okresach rozwoju jakiejś dziedziny fizyki, kiedy to autorzy nawiązują do dobrze opisanych matematycznie zjawisk z innych dziedzin).

Dla zilustrowania drugiej tezy możemy się posłużyć przykładem równania van der Waalsa, drganiami anharmonicznymi atomów w cząsteczce dwuatomowej, wahaniami wahadła matematycznego o dużej amplitudzie itp. Również świetną ilustracją jest powszechnie stosowany przez fizyków rachunek zaburzeń, w którym korzystamy z rozwiązania dobrze znanego dla sytuacji skrajnie uproszczonej (idealnej), a rozwiązywany problem traktujemy jako „lekko zaburzony" przypadek idealny.

Jan ŁOPUSZAŃSKI, Wrocław – Instytut Fizyki Teoretycznej UWr

Odpowiem na pytanie 3 i po części na pytanie 4. Umysł ludzki jest tak skonstruowany, że może jedynie operować abstrakcyjnymi pojęciami, wyabstrahowanymi w sposób sztuczny z otaczających go zjawisk. Mówiąc o krześle abstrahujemy od tego, że krzesło jest otoczone powietrzem, z którym oddziałuje, jest wystawione na wpływy pola grawitacyjnego (stoi np. na podłodze) i pól elektromagnetycznych (np. w postaci światła). Łatwiej jest nam określić, co to jest trwała cząstka materii, używając naszego arsenału pojęć, aniżeli zdefiniować jednoznacznie, co to jest cząstka nietrwała. Podobnie łatwo jest nam określić brak zaburzenia w układzie, ale trudno jest zdefiniować, co oznacza małe zaburzenie (jak określić jednoznacznie „małość" czegoś?). Nasza wiedza też jest tak skonstruowana. Posługujemy się pojęciami sztucznie przez nas wyodrębnionymi z całości zjawisk nas otaczających, zjawisk, gdzie trwa stałe oddziaływanie (obiektu, który nie oddziałuje z niczym, nie bylibyśmy w stanie postrzec i wykryć). Jest to defekt naszego poznania, ale na to nie ma rady. Tak nas Opatrzność urządziła.