

Bilard Weyla, czyli raz jeszcze o metodzie obrazów

Krzysztof REJMER

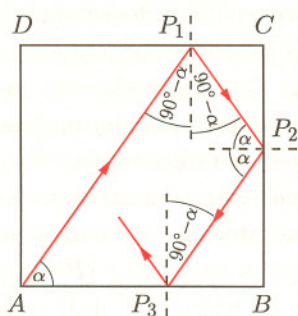
... Oto jest korytarz. Jeżeli otworzysz drzwi naszego salonu, zobaczysz malusieńki skrawek korytarza w Domu po Drugiej Stronie Lustra: i jak głęboko wzrok sięga, jest on bardzo podobny do naszego korytarza, tylko, wiesz, tam dalej może być zupełnie inny. Och, Kiciu! Jak miło byłoby przedostać się do Domu po Drugiej Stronie Lustra! Jestem pewna, że są tam, och, takie piękne rzeczy! Spróbujmy udać, że znaleźliśmy sposób przedostania się tam, Kiciu.

Lewis Caroll

O tym, co Alicja odkryła po drugiej stronie lustra
tłum. Maciej Słomczyński

Rozważmy stół bilardowy w kształcie kwadratu, którego bok ma jednostkową długość. Po stole porusza się bez tarcia kula, odbijając się sprężysto od band. Pomiedzy kolejnymi zderzeniami, zgodnie z prawami mechaniki klasycznej, kula porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Zderzenia ze ścianami są sprężyste, co oznacza, że wartość prędkości kuli nie zmienia się, zmianie ulega jedynie kierunek jej ruchu w taki sposób, że kąt odbicia jest równy kątowi padania. W narożnikach stołu znajdują się otwory (małe, czarne dziury), w które kula wpada, jeśli tylko trafi w narożnik.

Wyobraźmy sobie, że z jednego z narożników (na przykład A , rys. 1) wylatuje kula pod kątem α do boku AB . Interesować nas będzie następujące zagadnienie: jakie warunki muszą być spełnione, by kula wpadła w jeden z otworów znajdujących się w narożnikach, a także, jak długo będzie trwał jej ruch.



Rys. 1. Ruch kuli na kwadratowym stole bilardowym. Kąty padania i odbicia na ściankach BC i AD są zawsze równe α , natomiast na ściankach AB i DC są zawsze równe $90^\circ - \alpha$.

Na początek rozważmy przypadek, gdy $\text{tg } \alpha$ jest liczbą wymierną, to znaczy, gdy:

$$\text{tg } \alpha = \frac{p}{q},$$

gdzie p i q są liczbami względnie pierwszymi. Kiedy kula zderzy się ze ścianą BC (to może nastąpić od razu albo po kilku odbiciach od ścian AB i CD), dokonajmy zwierciadlanego odbicia kwadratu $ABCD$ względem prostej BC .

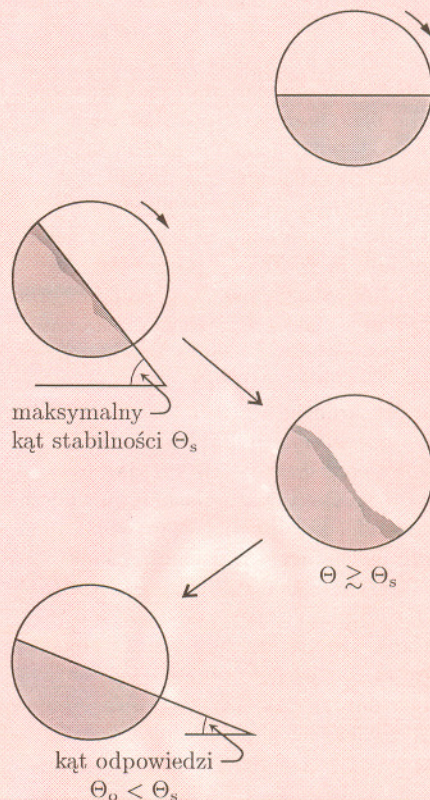
Pośredni stan skupienia: materia sypka

Maria

MASSALSKA-ARODŹ

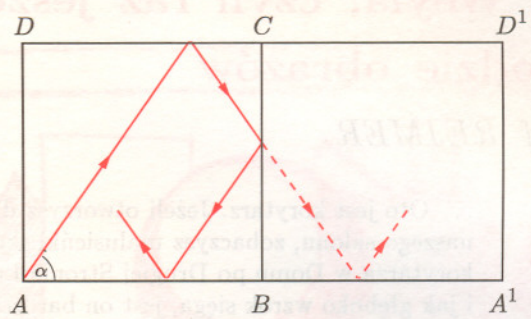
Materiały sypkie, takie jak piasek, sól, cukier, wszelkiego rodzaju żwiry, proszki czy granulaty składają się z wielu małych ziaren. Stykamy się z nimi w życiu codziennym, są powszechnie stosowane w przemyśle. W przyrodzie własności materiałów sypkich są przyczyną kataklizmów, takich jak osuwanie się ziemi czy lawiny. Poznanie własności materiałów sypkich, a są one często zagadkowe, wydaje się zatem bardzo istotne.

Zacznijmy od pytania o stan skupienia piasku wsypanego do naczynia. Wydaje się oczywiste, że układ taki jest w stanie stałym. Spróbujmy jednak obrócić naczynie! Otóż, gdy tylko nachylenie powierzchni piasku przekroczy pewien kąt (nazywany maksymalnym kątem stabilności Θ_s - rys.), to dalszy, nawet nieznaczny obrót naczynia spowoduje jakby przejście fazowe (podobnie jak ogrzanie lodu powyżej 0°C) do stanu, w którym ziarenka piasku zaczynają spontanicznie tworzyć „lawiny”.



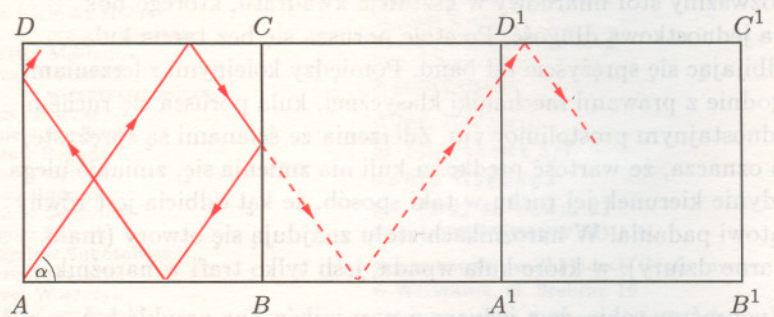
Obserwujemy wyraźny efekt płynięcia, a więc zjawisko charakterystyczne dla stanu ciekłego. Równocześnie można zauważyć, że przebiega ono w bardzo ciekawy sposób, na pewno inaczej niż w zwykłej cieczy. Otóż, w ruchu uczestniczą jedynie ziarna z cienkiej warstwy znajdującej się bezpośrednio przy powierzchni piasku. A więc tak naprawdę w stanie ciekłym jest jedynie ta warstwa ziaren. Pozostałe ziarna są nieruchome, a więc ta część układu jest nadal w stanie stałym. „Lawiny” biorące udział w zjawisku płynięcia zmniejszają kąt nachylenia powierzchni piasku. Proces płynięcia ustaje, gdy nachylenie powierzchni zmaleje do kąta zwanego kątem odpowiedzi $\Theta_o < \Theta_s$. Układy sypkie mają zatem dwa kąty graniczne – pomiędzy tymi kątami nachylenia układ znajduje się w stanie metastabilnym. To, czy układ pozostanie stabilny w danym stanie skupienia, czy też nastąpi przejście fazowe do innego stanu, zależy od historii eksperymentu. Potwierdzeniem takiej obserwacji może być doświadczenie z sypaniem pryzmy piasku. Spontaniczne płynięcie ziaren nie wystąpi, jeśli kąt nachylenia Θ powierzchni pryzmy będzie mniejszy od kąta Θ_o . Natomiast można go oczekiwać zawsze, gdy kąt nachylenia Θ przekroczy maksymalny kąt stabilności Θ_s , nawet gdybyśmy ostrożnie dokładali do pryzmy po jednym ziarenku.

Zastanówmy się teraz nad tak podstawowym parametrem charakteryzującym układy materialne jak gęstość. Otóż dla piasku wyspanego do cylindra zaskoczy nas brak jednoznaczności wyniku otrzymanego z doświadczenia. Wystarczy potrząsnąć cylindrem, aby pierwotna wysokość słupka piasku wypełniającego cylinder obniżyła się wyraźnie – okazuje się, że gęstość piasku może się tym sposobem powiększyć aż o 10%. Zmienia się przy tym współczynnik upakowania ziaren u , czyli ułamek całkowitej objętości próbki, którą zajmują ziarna. W stanie stałym upakowanie u nie może przekroczyć wartości $u_{\max} = 0,74$, która charakteryzuje najdoskonalsze upakowanie jednakowych kul (jak to wykazał Kepler). Natomiast najluźniejsze upakowanie, które jednak zapewnia jeszcze mechaniczną stabilność układu, charakteryzuje znacznie mniejsza wartość współczynnika upakowania $u_{\min} = 0,56$. Jeśli upakowanie jest mniejsze od tej progowej wartości, to piasek zaczyna płynąć. Zatem efekt płynięcia lub jakiegokolwiek deformacji w materiale sypkim jest związany z możliwością



Rys. 2. Stół bilardowy i jego zwierciadlane odbicie.

Od tego momentu będziemy rozważać ruch zwierciadlanej kuli na zwierciadlanym stole bilardowym A^1BCD^1 tak długo, aż wreszcie kula uderzy w ścianę A^1D^1 . Dokonamy wtedy zwierciadlanego odbicia naszego zwierciadlanego stołu względem prostej A^1D^1 otrzymując kolejny stół bilardowy $A^1B^1C^1D^1$, który jest tożsamy (z dokładnością do translacji) z wyjściowym stołem $ABCD$.

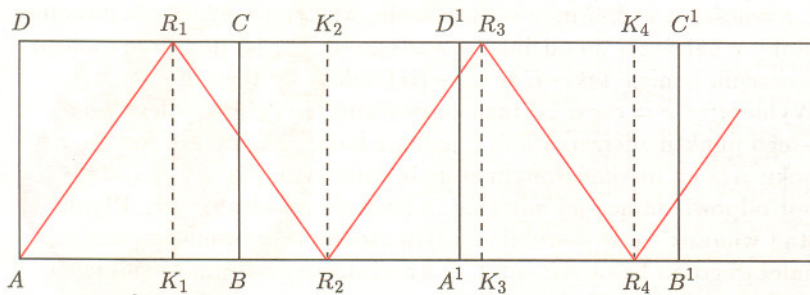


Rys. 3. Kwadratowy stół bilardowy i jego dwa kolejne zwierciadlane odbicia.

Oczywiście, przez cały czas śledzimy ruch kuli, która na przemian jest prawdziwą kulą, to znowu jej zwierciadlanym odbiciem.

Zapomnijmy teraz o zwierciadlanych światłach i wyobraźmy sobie nieskończenie długi stół bilardowy ograniczony odcinkiem AD i półprostymi AB i DC . Zamiast analizować ruch kuli na kwadratowym stole, zajmiemy się jej ruchem na stole nieskończonym, który jest mu równoważny. Stoły zwierciadlane były tylko pośrednim elementem konstrukcji. Każdemu odbiciu od boku DC (AB) kwadratowego stołu wzajemnie jednoznacznie odpowiada odbicie od półprostej DC (AB) na nieskończonym stole. Każdemu odbiciu od boku BC (AD) stołu kwadratowego także wzajemnie jednoznacznie odpowiada przejście przez odcinek B^iC^i (A^iD^i) na nieskończonym stole; linie te powstają w trakcie zwierciadlanych odbić jako wielokrotne obrazy boków BC (AD) pierwotnego stołu.

Z rysunku 4 widzimy, że i -ty punkt odbicia kuli od nieskończonych band jest odległy od boku AB o $i \cdot \frac{q}{p}$. W szczególności dla $i = p$ otrzymamy liczbę całkowitą p , co odpowiada trafieniu kuli w narożnik w naszym wyjściowym zagadnieniu. A zatem, zanim kula trafi w narożnik, $p - 1$ razy odbije się od band AB i CD oraz $q - 1$



Rys. 4. R_i oznaczają punkty kolejnych odbić kuli od band AB i DC nieskończonego stołu bilardowego, natomiast K_i ich rzuty prostopadłe na równoległy bok. Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q}$, to $AK_1 = R_i K_{i+1} = K_i R_{i+1} = \frac{q}{p}$.

razy przetnie linię $A^i D^i$ lub $B^i C^i$; każde z tych zdarzeń odpowiada wzajemnie jednoznacznie odbiciu kuli od boku kwadratowego stołu. Wynika stąd, że kula doznaje $p + q - 2$ zderzeń z bandami kwadratowego stołu bilardowego, zanim wpadnie w narożnik. Długość odcinka AR_1 (a także każdego z odcinków $R_i R_{i+1}$) jest równa:

$$s = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}.$$

A zatem długość łamanej przebytej przez kulę wynosi:

$$l = p \cdot s = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Jeśli przez v oznaczymy prędkość kuli, to czas trwania ruchu kuli, od momentu jej wystrzelenia do momentu znalezienia się w narożniku, jest równy:

$$t = \frac{1}{v} \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha$ jest liczbą niewymierną, to i -ty punkt zderzenia kuli z nieskończonymi bandami AB i DC jest odległy od boku AD o $i \operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ jest to liczba niewymierna, wnioskujemy, że kula nigdy nie znajdzie się w narożniku kwadratowego stołu, a jej ruch będzie trwał nieskończenie długo. Funkcja

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ni \alpha \rightarrow t(\alpha) \in [0, \infty],$$

jest dość niezwykła, ponieważ „na ogół” przyjmuje wartość nieskończoną (zbiór liczb niewymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych), natomiast gdzieś tam (tam, gdzie $\operatorname{tg} \alpha$ jest liczbą wymierną) przyjmuje wartość skończoną. Interesujące byłoby zbadanie własności tej funkcji. Może ktoś z Czytelników *Delty* będzie miał jakieś ciekawe pomysły?

Powróćmy do przypadku, gdy $\operatorname{tg} \alpha$ jest liczbą niewymierną.

W *Delcie* 7/1994 ukazał się artykuł Pawła Strzeleckiego „O potęgach dwójki”, w którym cytowane jest następujące twierdzenie Hermanna Weyla:

Twierdzenie

Niech x będzie liczbą niewymierną, natomiast a i b liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek: $0 \leq a < b \leq 1$. Zdefiniujmy następujący ciąg liczbowy: $c_i = ix - [ix]$. Niech $K_i(a, b)$ będzie liczbą elementów zbioru $\{c_n \in (a, b) : 1 \leq n \leq i\}$. Zachodzi wtedy następująca równość:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{K_i(a, b)}{i} = b - a.$$

jego rozprężenia, czyli zmniejszenia współczynnika upakowania. Dla ilustracji przywołam tu eksperyment, który pewnie każdy przeprowadził sam stąpając po wilgotnej, piaszczystej plaży. Deformacja wywołana ciśnieniem postawionej na piasku stopy powoduje, że powstaje wokół niej wzgórek suchego piasku. Jest to wywołane rozsunieniem się ziarenek, co pozwala wodzie znajdującej się w wolnych przestrzeniach pomiędzy ziarenkami przedostać się głębiej. Dla układów sypkich istotna jest zarówno własność sztywności, charakterystyczna dla stanu stałego, jak i własność płynięcia, typowa dla cieczy. To, z jakim zjawiskiem mamy w konkretnym przypadku do czynienia, jest uwarunkowane geometrycznym upakowaniem takich nieuporządkowanych układów.

Już podkreślałam, że nie jest sprawą oczywistą, do jakiego stanu skupienia zaklasyfikować materiały sypkie.

Potwierdza to obserwacja zachowania się fal akustycznych w tych układach. Wiadomo, że dźwięk rozchodzi się dobrze w substancjach w dowolnym stanie skupienia. Tymczasem, pomimo że poszczególne ziarna piasku są wyraźnie ciałem stałym (o składzie chemicznym danym wzorem SiO_2), to w próbce wypełnionej piaskiem fala akustyczna rozchodzi się znacznie wolniej niż w próbce jednorodnej (bez ziaren) o tym samym składzie: prędkość dźwięku w próbce składającej się z wielu szklanych kulek o średnicy 0,5 cm jest równa 280 m/s, podczas gdy w jednorodnej próbce szklanej jest około 15 razy większa. Rozchodzenie się dźwięku jest więc uzależnione nie tyle od składu chemicznego próbki, ile od sposobu wypełnienia jej objętości ziarnami. Stwierdzono ponadto, że prędkość rozchodzenia się fal głosowych jest silnie uzależniona od wzajemnego nacisku ziaren. Jeśli ziarna ledwo się dotykają, wówczas prędkość fali jest niewielka. W dużej przyźmie piasku wzajemny nacisk ziaren rośnie, gdy zbliżamy się do podłoża. Prędkość fali akustycznej w piaszczystej przyźmie będzie zatem różna na różnych wysokościach (na szczycie będzie bliska zero, a na głębokości h będzie proporcjonalna do $h^{1/6}$). Z powodu takiego rozkładu prędkości fala akustyczna nie będzie w stanie utrzymać pierwotnego poziomego kierunku rozchodzenia się na całej wysokości przyźmy. Wektor prędkości będzie więc stopniowo odchylany od kierunku poziomego aż pozostanie jedynie składowa pionowa prędkości dźwięku.

Rzeczywiście odgłos huczących fal morskich jest bardzo słaby, jeśli od morza oddziela nas piaszczysta wydma.

Inną ciekawą własność materiałów sypkich można zauważyć obserwując przesypywanie się piasku w klepsydrze odmierzającej czas. Otóż, czas „wypływu” piasku z górnej części klepsydry jest proporcjonalny do ilości piasku zebranego powyżej otworu. W odróżnieniu od cieczy, gdzie prędkość wypływu zależy od wysokości słupka cieczy ponad otworem, prędkość „wypływu” strumienia ziaren jest stała niezależnie od tego, jak dużo piasku jest nadal w naczyniu. Po prostu ciężar piasku jest równoważony przez siły tarcia przy ściankach naczynia. Szczegółowe obserwacje wypływu piasku przez otwory pozwoliły stwierdzić, że strumień piasku opuszczający cylinder wytwarza bardzo złożony ruch ziaren wewnątrz cylindra. Nad otworem powstaje stożek, poniżej którego ziarna piasku są nieruchome. Natomiast wewnątrz stożka ziarna poruszają się tworząc fronty, gdzie gęstość ziaren jest wyraźnie mniejsza niż w otoczeniu. Ich przemieszczanie się w czasie jest regularne. Można powiedzieć, że przepływ piasku przez cylinder przebiega w formie fal gęstości.

Przedstawiłam jedynie niektóre z własności materiałów sypkich. Pokazują one, że układy te zachowują się inaczej niż cieczy (np. przy wypływie ziaren), ale również odmiennie niż ciała stałe (np. przy transmisji dźwięku). Pomimo że zajmowano się materiałami sypkimi już od dość dawna (Hooke około roku 1700, Faraday – 1831 r., Reynolds – 1885 r.), wiele z własności materiałów sypkich czeka jeszcze na wyjaśnienie. Zachowanie się układów składających się z wielu ziaren stanowi przedmiot symulacji komputerowych oraz rozważań teoretycznych, a także skłania do nowych doświadczeń. Najnowsze rezultaty są publikowane w najbardziej renomowanych czasopismach [1–5].

Literatura:

1. S.R. Nagel, *Reviews of Modern Physics*, vol. 64, No 1, 321 (1992),
2. H.M. Jaeger i S.R. Nagel, *Science*, vol. 255, 1523 (1992),
3. Chu-heng Liu i S.R. Nagel, *Physical Review Letters*, vol. 68, No 15, 2301 (1992),
4. J.B. Knight, H.M. Jaeger i S.R. Nagel, *Physical Review Letters*, vol. 70, No 24, 3728 (1993),
5. A. Mehta i G.C. Barker, *Reports on Progress in Physics*, 383 (1994)

Z równości, o której mówi twierdzenie, wnioskujemy, że dla dowolnej liczby r należącej do odcinka otwartego $(0, 1)$ i jej dowolnie małego otoczenia istnieje takie i , że $ix - [ix]$ należy do tego otoczenia. Wybierając $x = \text{ctg } \alpha$ od razu zauważamy, że ix jest odległością i -tego punktu zderzenia kuli z jedną z band AB lub DC od boku AD na nieskończonym stole bilardowym, podczas gdy $ix - [ix]$ jest odpowiadającą jej odległością na stole kwadratowym. Płynnie stąd wniosek, że w dowolnie małym otoczeniu dowolnego punktu, należącego do boku AB lub CD kwadratowego stołu, znajdują się punkty, w których kula odbija się od bandy. Oczywiście, to samo można powiedzieć o bokach AD i BC . Przez punkt ten przechodzą dwie proste nachylone do boku pod kątem α i $180^\circ - \alpha$, wzdłuż których kula poruszała się przed i po zderzeniu z bandą. Jeśli teraz weźmiemy dowolny punkt z wnętrza kwadratu, to w każdym jego otoczeniu znajdzie się przynajmniej jedna taka prosta. A zatem kula bilardowa po dostatecznie długim czasie przejdzie dowolnie blisko każdego z wewnętrznych punktów stołu bilardowego. Jest to prawda dla prawie wszystkich warunków początkowych, poza zbiorem odpowiadającym początkowym prędkościom kuli, które tworzą z bokiem kwadratu kąty o wymiernej wartości tangensa.

Kiedy stopa wywiera nacisk na piasek ubity cofającym się odpływem, najbliższe otoczenie stopy natychmiast wysycha... Nacisk stopy powoduje objętościowe powiększenie się piasku, a więc szczeliny w otaczającym piasku wciągają więcej wody wywołując wysuszenie aż do momentu, gdy z dołu podniesie się dostateczna jej ilość do ponownego zwilgotnienia. Podnosząc stopę na ogół widzimy, że piasek pod nią i wokół niej natychmiast wilgotnieje. Dzieje się tak na skutek reakcji piasku po usunięciu działających przedtem sił...

Osborn Reynolds

British Association Report, Aberdeen, 1885

Gdybyśmy zapytali kogokolwiek z dwóchset tysięcy milionów mężczyzn, kobiet i dzieci, którzy od początku świata kiedykolwiek przechadzali się po mokrym piasku, ilu z nich, przed posiedzeniem Brytyjskiego Towarzystwa w Aberdeen w 1885 roku, na pytanie: „Czy piasek pod stopami ulega ściśnięciu?”, odpowiedziałoby inaczej niż „Tak!”? (W przeciwieństwie do stąpania po dnie morskim pokrytym mokrymi wodorostami.)

Lord Kelvin

Baltimore Lectures, 1904

Jakiegokolwiek jest najściślej przypadkowe upakowanie, z eksperymentów Osborna Reynoldsa na wybrzeżu morskim staje się jasne, że najmniejsze choćby zakłócenie zwiększa rozmiary luk. Tę samą zasadę może wyjaśnić sztuka magiczna hinduskiego fakira, o jakiej wspomina Martin Gardner. Cylindryczny dzbanek z dość wąskim otworem napełnia się niegotowanym ryżem, delikatnie potrząsając tak, aby dobrze się ułożył. Nóż kuchenny zanurza się kilkakrotnie do dzbanu, za każdym razem coraz głębiej. Po około dwunastu zanurzeniach nóż nagle uwięźnie tak mocno, że w trakcie wyciągania będzie się podnosił cały dzbanek z ryżem.

H.S.M. Coxeter

Wstęp do geometrii dawnej i nowej, 1961