Paradoks urodzin i zakłady na weselach

Paweł STRZELECKI

Prawie każdy z nas lubi, choćby od czasu do czasu, założyć się np. o duże lody, szczególnie gdy wie, że ma ogromne szanse na to, by zakład wygrać. Podamy dziś propozycję pewnego zakładu, na którą można nabrać znakomitą większość osób nie znających rachunku prawdopodobieństwa.

Przypuśćmy, że jesteśmy na średniej wielkości rodzinnym weselu, na którym bawi się (lepiej lub gorzej) pięćdziesięcioro gości w najróżniejszym wieku. Załóżmy się z jednym z nich, że wśród wszystkich weselników znajdą się przynajmniej dwie osoby, które obchodzą swoje urodziny tego samego dnia (to znaczy, obie urodziły się np. 19 sierpnia, choć niekoniecznie w tym samym roku). Wielu laików uważa, że to mało prawdopodobne zdarzenie. Gdy się spyta, dlaczego tak sądzą, można na ogół usłyszeć odpowiedzi w rodzaju:

No,... to chyba oczywiste: przecież dni w roku jest **aż** 365, a gości **tylko** 50; można na przykład dla każdego wybierać datę urodzenia w innym tygodniu roku (na **mnóstwo** sposobów), a i tak jeszcze zostaną dwa tygodnie w zapasie.

To jednak złudne wrażenie. Przekonajmy się o tym za pomocą rachunku. Oznaczmy dla wygody liczbę wszystkich gości przez n. Załóżmy też dla uproszczenia, że rok zawsze ma 365 dni i że wszystkie daty urodzenia są jednakowo prawdopodobne. Gdy sprawdzamy, kto wygrał zakład, to musimy z karteczką i ołówkiem w ręku podejść do każdego gościa i zapisać dzień i miesiąc jego urodzenia. Otrzymamy w ten sposób n-wyrazowy ciąg *dat*; każda z tych *dat* może mieć jedną z 365 różnych wartości. Dla $n = 2$ takich ciągów jest 365^2 (wyobraźmy sobie wielką kwadratową tabelę 365×365; par *dat* urodzin jest dokładnie tyle, co pól tabeli). Dla $n = 3$ takich ciągów jest 365^3 (tym razem można pomyśleć o tabeli w kształcie sześcianu). W ogólnym przypadku n-wyrazowych ciągów dat jest 365^n.

A ile jest ciągów *wygrywających*, w których przynajmniej dwie *daty* są takie same? To też nietrudno obliczyć. Od liczby wszystkich ciągów, 365^n, trzeba odjąć liczbę ciągów *przegrywających*, czyli takich, w których wszystkie *daty* są różne. Tych ostatnich jest

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)\,.$$

Dlaczego? Jeśli bowiem chcemy dla n gości wybrać różne daty urodzin, to dla pierwszego mamy do wyboru wszystkie 365 możliwości, dla drugiego – już tylko 364 możliwości (bo wykreśliliśmy już jedną datę z kalendarza), dla trzeciego – 363 możliwości, itd. Wreszcie, wybierając datę urodzin dla n–tego gościa mamy $365 - n + 1$ możliwości, bo w kalendarzu $(n - 1)$ miejsc zajęły (różne!) daty urodzin poprzednich $(n - 1)$ gości.

Gdy, tak jak w naszym przypadku, wszystkie możliwe wyniki losowego doświadczenia są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo wygranej oblicza się dzieląc liczbę wyników wygrywających przez liczbę wszystkich wyników. Zatem, prawdopodobieństwo p_n zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej dwóch spośród n weselnych gości wyprawia swoje przyjęcia urodzinowe w tym samym dniu, jest równe

$$p_n = \frac{365^n - 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365 - n)!365^n}\,.$$

Rozwiązanie zadania M 729.
$4(abc+abd+acd+bcd)=$
$=4ab(c+d)+4cd(a+b)=$
$=[(a+b)^2-(a-b)^2](c+d)+$
$+[(c+d)^2-(c-d)^2](a+b)\leq$
$\leq(a+b)^2(c+d)+(c+d)^2(a+b)=$
$=(a+b+c+d)(a+b)(c+d)=$
$=4(a+b)(c+d)=$
$=(a+b+c+d)^2-(a+b-c-d)^2\leq$
$\leq(a+b+c+d)^2=16,$
zatem $abc+abd+acd+bcd\leq 4$ i równość zachodzi dla $a=b=c=d=1$.

Dla $n=50$ mamy $p_{50}=0{,}97\ldots$. Na pytanie, co to właściwie znaczy, Uczony Statystyk powiedziałby dość mętnie, że jeśli będziemy na stu różnych pięćdziesięcioosobowych weselach i na każdym raz założymy się w opisany wyżej sposób, to wygramy, średnio rzecz biorąc, około 97 razy. Można próbować zakładać się i na weselach, na których jest na przykład 40 gości (a na stuosobowym weselu naprawdę warto spróbować kogoś naciągnąć). Dla zainteresowanych podajemy kilka przykładowych wartości p_n dla różnych n.

I jeszcze jedno: najmniejszą liczbą naturalną n, dla której $p_n>\frac{1}{2}$, jest 23. Ci Czytelnicy *Delty*, którzy chodzą jeszcze do szkoły, mogą sprawdzić, czy w ich klasie są dwie osoby obchodzące urodziny tego samego dnia.

n	23	25	30	40	70	100
p_n	$0,507\ldots$	$0,568\ldots$	$0,706\ldots$	$0,891\ldots$	$0,9991\ldots$	$0,9999996\ldots$

Rozwiązanie zadania M 730. Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty (bo jest funkcją ciągłą, dla dostatecznie małych argumentów przyjmuje wartości przeciwnego znaku niż dla dostatecznie dużych). Gdyby wielomian W miał więcej niż jeden pierwiastek rzeczywisty, to jako wielomian trzeciego stopnia rozkładałby się na iloczyn dwumianów o współczynnikach rzeczywistych, miałby więc trzy pierwiastki rzeczywiste (licząc z krotnościami). Jednak w przypadku wielomianu W jest to niemożliwe gdyż ze wzoru Viete'a wynika, iż iloczyn pierwiastków byłby równy 1, a $W(x)<0$ dla $x<0$ i $W(x)>0$ dla $x>1$.

Jednoelektronowa komórka pamięci

Naukowcy z laboratorium koncernu Hitachi skonstruowali komórkę pamięci komputerowej, która prawdopodobnie przyczyni się do rewolucji w dziedzinie przechowywania informacji. Komórka ta wykorzystuje dokładnie jeden elektron do zapisu jednego bitu informacji. Dla podkreślenia wagi tego osiągnięcia należy dodać, że obecnie stosowane elementy pamięci, aby uzyskać ten sam efekt, potrzebują około 500 000 elektronów. Układy pamięci oparte na zapisie jednoelektronowym będą zużywały milion razy mniej mocy i zajmowały 10 000 razy mniejszą powierzchnię niż obecnie powszechnie dostępne układy pamięci.

Pierwsze doniesienie o komórce pamięci wykorzystującej małą liczbę nośników (100 elektronów do zmagazynowania jednego bitu informacji) pojawiło się na początku 1993 roku. Niestety, ta struktura elektroniczna pracowała tylko w ekstremalnie niskiej temperaturze 0,03 K. Natomiast naukowcy z laboratorium Hitachi twierdzą, że opracowana przez nich jednoelektronowa komórka pamięci pracuje w temperaturze pokojowej.

Uzyskanie tej komórki było możliwe dzięki zastosowaniu nowoczesnych technologii i nowoczesnych materiałów. Strukturę elektroniczną tego elementu zbudowano na warstwie izolacyjnej arsenku galu. Najpierw przy użyciu wiązki elektronowej wycięto w tej warstwie kanały o szerokości 100 nm i głębokości kilku warstw atomowych. Następnie kanały wypełniono cienką warstwą amorficznego krzemu. Wreszcie struktura została wygrzana w temperaturze 750°C. W czasie tego procesu krzem zrekrystalizował tworząc warstwę polikrystaliczną o rozmiarach ziaren około 10 nm. Na skutek efektów złączowych przy brzegach kanałów ich efektywna szerokość wynosiła nie 100, lecz 10 nm. W takich kanałach drogę dostępną dla elektronów stanowi „drut" złożony z kolejnych ziaren krzemu. Przepływ prądu odbywa się tu poprzez tunelowanie pojedynczych elektronów między granicami kolejnych ziaren.

Rozwiązanie zadania M 731. Nie. Gdyby bowiem dla pewnych $a,q>0$ było

$$a=\sqrt{p_1},\quad aq^n=\sqrt{p_2},\quad aq^m=\sqrt{p_3},$$

gdzie $m>n$ są naturalne, to rugując z trzech powyższych równości a i q otrzymalibyśmy

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^m=\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^n$$

lub równoważnie $p_2^m=p_1^{m-n}p_3^n$. To zaś jest sprzeczne z twierdzeniem o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze.

Pamięć jednoelektronowa wykorzystuje zjawisko blokady kulombowskiej. Ponieważ komórka pamięci ma bardzo małe rozmiary, więc po wpuszczeniu do niej jednego elektronu jej potencjał zwiększa się na tyle, że następny elektron nie może do niej wpłynąć. Z drugiej strony elektron samorzutnie nie może opuścić komórki. Dwa stany komórki – z i bez elektronu – mogą reprezentować jedynkę i zero informacji cyfrowej.

Jacek JASIŃSKI