Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1994 upływa 28 lutego 1995). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 281 (WT=2,73) i 282 (WT=1,45) z numeru 5/1994

Lesław Skrzypek	–	1- 46,78
Waldemar Pompe	–	43,89
Mirosław Matlęga	–	40,30
Krzysztof Jedziniak	–	2- 39,72
Krystyna Witek	–	1- 32,00
Marek Karaś	–	31,81
Adam Czornik	–	2- 31,25
Henryk Kornacki	–	2- 30,44
Tadeusz Józefczyk	–	2- 30,24
Krzysztof Zapisek	–	29,41
Janusz Olszewski	–	2- 28,19
Tomasz Wietecha	–	2- 25,76
Mikołaj Rotkiewicz	–	1- 25,42
Piotr Żmijewski	–	21,75
Krzysztof Parol	–	21,26
Piotr Lipiński	–	21,24

Legenda (przykładowo): stan konta 2-39,72 oznacza, że uczestnik już dwukrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (trzeciej) rundzie ma 39,72 punktów.

Jak przed rokiem, listę otwiera pan Skrzypek, po raz drugi przekraczając próg 44 punktów (gratulujemy tej regularności: runda/rok).

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;

– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1992, 1993 lub 1994.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (4), M. Prauza, P. Kumor, P. Gadziński (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):

„dwukrotni": Z. Bartold, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kasperski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lizak, J. Mańdziuk, M. Marczak, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, M. Roman, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski.

Zadania z matematyki nr 295, 296

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań 31 V 1995

295. Dana jest liczba naturalna n. Wyznaczyć najmniejszą liczbę m o następującej własności: z każdego m-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ można wybrać liczby a, b, dla których $n < a - b < 2n$.

296. Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P. Jego odległości od wierzchołków A, B, C równe są odpowiednio R_a, R_b, R_c, a od prostych BC, CA, AB – odpowiednio r_a, r_b, r_c. Dowieść, że

$$8(\sqrt{R_bR_c} + r_a)(\sqrt{R_cR_a} + r_b)(\sqrt{R_aR_b} + r_c) \leq 27\, R_aR_bR_c\,.$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie **296** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1994

Przypominamy treść zadań:

287. Czy istnieje trójkąt, w którym dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych jest prostopadła do jednej ze środkowych, a długości boków są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi?

288. Przyjmijmy $a_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać istnienie i obliczyć wartość granicy $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n^2}$.

287. W trójkącie ABC o bokach długości $|AC| = 2$, $|BC| = 3$, $|AB| = 4$ dwusieczna kąta A jest prostopadła do środkowej poprowadzonej z wierzchołka C. Aby się o tym przekonać, można na przykład umieścić ten trójkąt w układzie współrzędnych, przyjmując $A = (0, \sqrt{27/8})$, $B = (-\sqrt{5/2}, -\sqrt{27/8})$, $C = (\sqrt{5/8}, 0)$; odcinki, o które chodzi, są zawarte w osiach układu.

288. Wygodnie będzie powołać się na *wzór Stirlinga*:

$$(1) \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \alpha_n\,, \qquad 1 < \alpha_n < \frac{n+1}{n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,;$$

można podać znacznie dokładniejsze oszacowanie współczynnika α_n, ale w tym zadaniu wystarczy takie, jak wyżej – wynika z niego, że

$$(2) \qquad \beta_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n < n + 1.$$

Korzystając z (1) obliczamy:

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n-1}{k}^{-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = \frac{n^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot\alpha_n}$$

(równość słuszna także dla $n = 1$, jeśli przyjąć $a_0 = 1$). Zatem

$$a_n = c_1c_2\ldots c_n = \frac{\mathrm{e}^{1+2+\ldots+n}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{4\pi}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2n\pi}\cdot\beta_n} = \frac{\mathrm{e}^{n(n+1)/2}}{(2\pi)^{n/2}(n!)^{1/2}\beta_n}\,,$$

skąd

$$(3) \qquad a_n^{2/n^2} = \mathrm{e}^{(n+1)/n}\cdot(2\pi)^{-1/n}\cdot(n!)^{-1/n^2}\cdot\beta_n^{-2/n^2}.$$

Korzystając jeszcze raz z (1) widzimy, że

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\left((2\pi n)^{1/2n^2}\cdot n^{1/n}\cdot\mathrm{e}^{-1/n}\cdot\alpha_n^{1/n^2}\right) = 1.$$

Z oszacowania (2) otrzymujemy $1 < \beta_n^{2/n^2} < (n+1)^{2/n^2}$, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n^{2/n^2} = 1.$$

Równość (3), po uwzględnieniu związków (4) i (5), daje wynik:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{2/n^2} = \mathrm{e}\,, \qquad \text{czyli} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n^2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

* * *

W dorocznym omówieniu, tradycyjnie, drukujemy znalezione przez uczestników ligi dowody i wyprowadzenia ogólniejsze lub bardziej pomysłowe od naszych „firmowych”. Tym razem sytuacje takie są rzadkie, wykaz jest skromniejszy niż w latach ubiegłych – ku niekłamanemu ukontentowaniu Redaktora Naczelnego (…miejsca w numerze nigdy za dużo…), lecz ku zatroskaniu prowadzącego Ligę. Bo przecież jej sympatyczni uczestnicy (a są to w dużej mierze nazwiska powtarzające się od paru lat) nie utracili nagle inwencji. Wniosek: zadania były mniej udane niż poprzednio, mniej dawały możliwości różnorodnych dróg ataku, matematycznego „wyżycia się”. Zobaczymy, jak to będzie za rok…

Oto ciekawsze rozwiązania zadań oraz uogólnienia i komentarze (uczestników ligi oraz nasze). Gdy zadanie zostało zrobione przez nie więcej niż sześć osób, podajemy ich nazwiska.

Zadanie **263.** [Kółka i krzyżyki w tabeli 10×2; krzyżyki nie sąsiadują; ile takich rozmieszczeń?] (współczynnik trudności WT=2,50; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 9$). Były różne odpowiedzi. Jako ciekawostkę podajemy największy oraz najmniejszy uzyskany wynik: 12470603 oraz 17 (prawidłowy wynik: 8119). Zwykła metoda polegała na znalezieniu wzoru rekurencyjnego na liczbę a_n dopuszczalnych rozmieszczeń w tabeli o wymiarach $n \times 2$. Jest to prosta rekurencja liniowa, więc pozwala znaleźć jawny wzór $a_n = \frac{1}{2}\left((1-\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^{n+1}\right)$. Podają go **P. Gadziński**, **L. Gasiński**, **T. Kulpa**, a także (w nieco mniej czytelnej postaci) **J. Olszewski** i **L. Skrzypek**.

Zadanie **269.** [Rozważamy liczby $n \in \mathbf{N}$ takie, że dla każdych zbiorów $T_1, \ldots, T_n$:

$$\left(|T_i| = 3 \ \ (1 \le i \le n), \quad |T_i \cap T_j| = 1 \ \ (1 \le i < j \le n)\right) \implies \left(\left|\bigcap T_i\right| = 1\right);$$

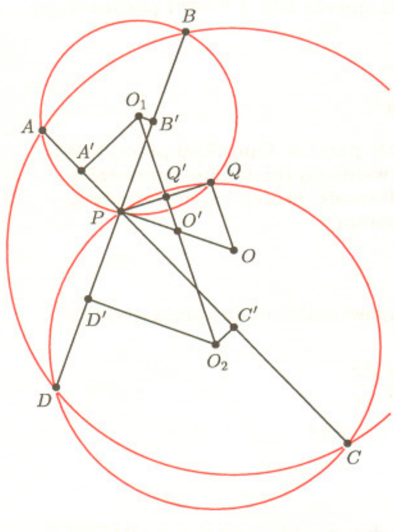
$\min n = ?$] (WT=1,81; LPR=13). **M. Lewandowski** i **T. Wietecha** rozważają analogiczne zagadnienie dla zbiorów k-elementowych ($k \ge 3$; w zadaniu mamy $k = 3$) i pokazują, że szukana minimalna wartość n nie przekracza $k(k-1)+2$; pan Lewandowski zwraca też uwagę, że wydane przez PWN książki: M. Kordos, *Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej* (1984) oraz W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna* (1986) podają pewne warunki dostateczne na to, by powyższe oszacowanie było (lub nie było) dokładne.

Zadanie **270.** [$f(x) = x^{x^x}$; $\lim\limits_{x \to 0+} (f(\sin x)/f(x)) = ?$] ($WT$=3,16; LPR=5). Zadanie okazało się trudniejsze niż oczekiwaliśmy. Autorzy dobrych rozwiązań: **P. Gadziński**, **L. Skrzypek**, **T. Wietecha**, **H. Kornacki**, **J. Ciach**. Uogólnienie: T. Wietecha dowodzi, że określając $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}$ mamy $\lim\limits_{x \to 0+} (f_n(\sin x)/f_n(x)) = 1$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$.

Zadanie **275.** [$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ różniczkowalna; $(f(f(x))) = f(x) \ge 0$; $f(x) = ?$] (WT=2,57; LPR=5). Efektowne rozwiązanie znaleźli **M. Kasperski** i **P. Gadziński**:

Funkcja $g(x) = f(f(x))$ spełnia warunki $g(g(x)) = g(x) \ge 0$, czyli $(*)\ g(y) = y \ge 0$ dla $y \in g(\mathbf{R})$. Przyjmując $a = \inf\{g(y)\colon y \in \mathbf{R}\}$ mamy (wobec ciągłości) $a \in g(\mathbf{R})$, a stąd $g(a) = a = \min\{g(y)\colon y \in \mathbf{R}\}$, więc (wobec różniczkowalności) $g'(a) = 0$; jest to sprzeczność z $(*)$, jeśli tylko zbiór $g(\mathbf{R})$ zawiera liczby większe od a. Zatem $g(\mathbf{R}) = \{a\}$, skąd $f(x) = f(g(x)) = f(a)$; tzn. f jest funkcją stałą.

Ponadto dobre rozwiązania podali: **T. Kulpa**, **L. Skrzypek** oraz **Z. Sewartowski**, który zauważa, że założenie różniczkowalności funkcji f na zbiorze $\mathbf{R}$ można zastąpić koniunkcją warunków: własność Darboux (na zbiorze $\mathbf{R}$) oraz różniczkowalność w punktach a i b, gdzie $a = \inf f$, $b = f(a)$.



Zadanie **276.** [P – punkt przecięcia cięciw AC i BD okręgu o środku O; okręgi PAB i PCD przecinają się w punktach P i Q $(O \ne Q \ne P) \implies OQ \perp QP$] ($WT$=2,38; LPR=5 (8 ?)). Niewygodę stanowiła w tym zadaniu spora liczba możliwych konfiguracji (por. niezgrabne rozwiązanie „firmowe"). Część rozwiązań „poprawnych, ale nie całkiem" została tak zakwalifikowana właśnie z powodu oparcia rozumowania na rysunku przedstawiającym jeden z możliwych układów, bez dołączenia uwagi, jakie modyfikacje (i w których miejscach) są konieczne w innych sytuacjach. Na tym tle zasługuje na wyróżnienie śliczne rozwiązanie **Przemka Gadzińskiego**, krótkie i całkiem niezależne od przypadku:

Oznaczmy przez A', B', C', D', O', Q' środki odcinków PA, PB, PC, PD, PO, PQ. Punkty A' i C' są, odpowiednio, rzutami środka O_1 okręgu PAB oraz środka O_2 okręgu PCD na prostą AC; zatem środek odcinka O_1O_2 leży na symetralnej odcinka $A'C'$; leży on też (analogicznie) na symetralnej odcinka $B'D'$ – pokrywa się więc ze środkiem okręgu $A'B'C'D'$, czyli z punktem O'. Tak więc O' leży na prostej O_1O_2. Także Q' leży na prostej O_1O_2. Stąd $OQ \| O_1O_2 \perp PQ$.

Bezbłędne rozwiązanie podał także **T. Kulpa**, a rozwiązania nieznacznie („wybaczalnie") zależne od rysunku – **A. Dudek** i **M. Rokicki**; ponadto **M. Sarniak** – przez odesłanie do literatury (W. W. Prasołow, *Zadaczi po płanimetrii*, Moskwa 1991, zad. 2.86).

Zadanie **277.** [$a_0 = 1$, $a_{n+1} = (a_1 + \ldots + a_n)^{-1} - \sqrt{2} \implies$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny] (WT=3,46; LPR=4). Nie chce się wierzyć – tylko cztery dobre rozwiązania (zresztą nie prostsze od „firmowego"): **P. Gadziński**, **T. Kulpa**, **P. Żmijewski**, **L. Skrzypek**.

Autorzy wielu prac znajdują właściwą wartość sumy szeregu $(1/\sqrt{2})$, wszelako wykorzystując w rachunkach (w sposób jawny lub ukryty) fakt jego zbieżności – czyli tezę zadania!

Zadanie **281.** [Liczby parzyste i nieparzyste w sześciu komórkach; ciąg zmian zawartości losowo wybranych komórek (start: same zera); średni czas ponownego dojścia do sześciu liczb jednakowej parzystości = ?] (WT=2,73; LPR=3 (5 ?)). I tu rozwiązania bezbłędne (**T. Kulpa**, **H. Kornacki**, **L. Skrzypek**) nie różniły się istotnie od „firmowego"; były jeszcze dwa rozwiązania zasadniczo poprawne, ale z dość istotnymi lukami w uzasadnieniach.

Zadania z fizyki nr 193, 194

Redaguje Jerzy B. BROJAN

193. Siły przypływowe działające na Ziemię ze strony Księżyca powodują stopniowe spowalnianie obrotu Ziemi (wydłużanie dnia). Gdy w odległej przyszłości obrót Ziemi zsynchronizuje się z obiegiem Księżyca, pływy ustaną. Ile będzie wtedy wynosiła jednakowa długość dnia i miesiąca, a ile – odległość Księżyca od Ziemi? Przyjąć, że moment bezwładności Ziemi jest równy 0,33 MR^2 (pamiętajmy, że Ziemia nie jest jednorodną kulą – średnia gęstość jądra jest większa niż płaszcza i skorupy). Pozostałe niezbędne dane wziąć z tablic. Pominąć siły pływowe działające ze strony Słońca.

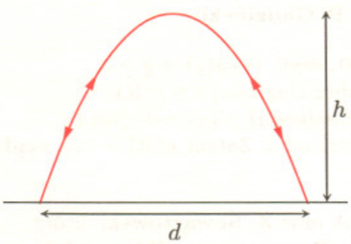
194. Dwa mikrofony umieszczono we wzajemnej odległości 0,5 m. Nietoperz leci w kierunku równoległym do prostej, na której leżą mikrofony i w danej chwili znajduje się w odległości 10 m od każdego z nich. Stwierdzono, że częstotliwość „pisku" nietoperza wynosi 100 kHz, a łączny sygnał (otrzymany z dodania sygnałów odbieranych przez oba mikrofony) pulsuje z częstotliwością 50 Hz. Z jaką prędkością leci nietoperz? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 330 m/s.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1994

Przypominamy treść zadań:

185. Odpowiednio rzucona jednorodna sprężysta piłeczka może skakać tam i z powrotem po poziomej powierzchni (rys. 1) na skutek ruchu obrotowego. W rozwiązaniu zadania pomijamy poślizg występujący na początku zderzenia, powodujący straty energii i w konsekwencji powrót piłeczki po nieco innym torze. Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia piłeczki o podłoże, jeśli maksymalna wysokość lotu jest równa h, a punkty odbicia są odległe od siebie o d? Ile wynosi prędkość kątowa piłeczki w czasie lotu? Promień r piłeczki jest dany.

186. Odcinek kolejowej trakcji elektrycznej jest zasilany w punktach A i B napięciem $U = 1000$ V, a oporność przewodów wynosi $\varrho = 2\ \Omega$ na każde 100 m długości. Pociąg o masie $m = 100$ ton stoi w chwili początkowej w punkcie C odległym o $d_1 = 500$ m od podstacji AB (rys. 2). Pociąg rusza z maksymalnym przyspieszeniem w prawo i po czasie t mija punkt D leżący w odległości $d_2 = 2$ km od AB. Ile razy zmaleje ten czas, gdy podwoimy napięcie U? Obliczyć numerycznie wartość t dla podanych wartości stałych. Czy w bardzo dużej odległości od AB ($d_2 \to \infty$) prędkość pociągu rośnie nieograniczenie, czy tylko do pewnej granicy?



Rys. 1

185. Nietrudno z danych d i h obliczyć poziomą składową v_x prędkości piłeczki tuż przed odbiciem (lub tuż po nim) i analogiczną składową pionową v_y. Otrzymuje się $v_x = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}$, $v_y = \sqrt{2gh}$. Oznaczmy siłę tarcia (poziomą składową siły reakcji podłoża) przez T, a siłę nacisku (składową pionową) przez N. Uwzględniając, że obie te siły zmieniają się w czasie odbicia piłeczki i przyrównując ich popęd do zmiany odpowiedniej składowej pędu mamy równania

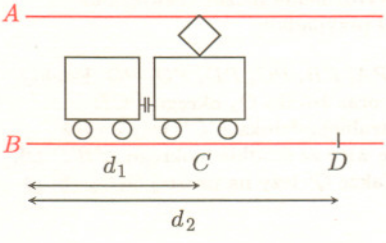
$$\int T\,\mathrm{d}t = 2mv_x\,, \qquad \int N\,\mathrm{d}t = 2mv_y\,.$$

Ponieważ $T \le Nf$ (gdzie f – współczynnik tarcia statycznego), więc f spełnia nierówność

$$f \ge \frac{v_x}{v_y} = \frac{d}{4h}\,.$$

Aby znaleźć prędkość kątową ω, należy zauważyć, że w czasie odbicia piłeczka zmienia zwrot obrotu, czyli zmiana momentu pędu względem środka wynosi $\Delta K = 2I\omega = 2 \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega$, gdzie I – moment bezwładności. Przyrównując ΔK do całki z momentu siły $\int Tr\mathrm{d}t$ i podstawiając $\int T\mathrm{d}t = 2mv_x$ otrzymujemy

$$\omega = \frac{5}{2}\frac{v_x}{r} = \frac{5}{4}\frac{d}{r}\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$



Rys. 2

186. Oznaczmy bieżącą odległość pociągu od podstacji AB przez x. Opór linii przesyłowej $R = \varrho x$ jest dołączony szeregowo do źródła napięcia. Jak wiadomo (nietrudno sprawdzić), maksymalna moc jest w takiej sytuacji czerpana przez odbiornik, którego opór jest równy oporowi R, a wartość tej maksymalnej mocy jest dana wzorem

$$P = \frac{U^2}{4R} = \frac{U^2}{4\varrho x}\,.$$

Taką właśnie moc osiągnie lokomotywa, która nada pociągowi maksymalne przyspieszenie. Podstawiając

$$P = Fv = mav = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

dochodzimy do równania różniczkowego opisującego ruch pociągu

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}x = p\,,$$

gdzie $p = \frac{U^2}{4\varrho m}$. Wprowadzenie zmiennych bezwymiarowych $y = x/d_1$ oraz $\tau = t(p)^{1/3}/d_1$ prowadzi do prostszej postaci

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}y = 1\,.$$

Funkcja $y(\tau)$ spełniająca to równanie (z warunkami początkowymi $y_0 = 1$, $y_0' = 0$) nie zależy od p ani d_1, czyli danej końcowej wartości $y = \frac{d_2}{d_1}$ odpowiada ustalona wartość τ. Stąd mamy odpowiedź na pierwsze pytanie: t jest proporcjonalne do $p^{-1/3}$, czyli do $U^{-2/3}$ (szybciej można dojść do tego wyniku na podstawie samej analizy wymiarowej). Rozwiązując numerycznie równanie (*) stwierdzamy, że wartość $y = 4$ jest osiągana dla $\tau \approx 2{,}46$, zatem $t \approx 2{,}46 \cdot p^{-1/3}d_1 = 246$ s. Wreszcie ostatnie pytanie wymaga zbadania asymptotycznej postaci funkcji $y(\tau)$; Czytelnik może sprawdzić, że dla τ dużych $y \approx \tau(3\ln\tau)^{1/3}$, czyli prędkość rośnie nieograniczenie – jak $(\ln t)^{1/3}$. Jest to jednak wzrost bardzo powolny.

W tym „roku sprawozdawczym” wśród nadesłanych rozwiązań znalazło się sporo bardzo interesujących, lepszych od zaproponowanych w *Delcie*. Oto niektóre z nich.

Zadanie **163.** [Jak odróżnić puszkę z cieczą od puszki z ciałem stałym?] ($WT = 2{,}24$, $LPR = 4$). Zamiast porównywać szybkości staczania się puszek z pochylni można było potoczyć puszkę, zatrzymać na krótką chwilę i puścić – wirująca w środku ciecz wprawi wtedy puszkę w ruch, podczas gdy puszka z ciałem stałym pozostanie w spoczynku. Na taki prostszy pomysł wpadli **P. Gworys**, **P. Perkowski**, i **A. Borowski**, natomiast rozwiązanie zbliżone do „wzorcowego” przysłał **J. Konieczny**.

Zadanie **164.** [Lewitujący naładowany krążek] ($WT = 3{,}27$, $LPR = 2$). To zadanie jest najgrubszą – jak dotąd – wpadką prowadzącego ligę fizyczną, gdyż w pionowym polu magnetycznym kierunek sił działających na krążek jest, oczywiście, *poziomy* (radialny) i o żadnej lewitacji nie ma mowy. Panu **A. Borowskiemu**, który nie mogąc zrozumieć sensu zadania napisał list dopiero po opublikowaniu błędnego rozwiązania w *Delcie*, należy się, oprócz wyrazów uznania, także uwzględnienie tego w punktacji. Zdecydowaliśmy przyznać mu maksimum punktów za to zadanie (3,27), chociaż regulamin takiego przypadku nie przewiduje. Swoją drogą, aż dziwne, że tak oczywisty błąd został dostrzeżony tylko przez jednego Czytelnika, a inni dali się zmylić i przysłali zasugerowane „rozwiązania”. Oczywiście, zaliczonych punktów już potem im nie odebrano.

Zadanie **165.** [Czy można kraść energię z napowietrznych linii energetycznych?] ($WT = 1{,}40$, $LPR = 3$). Bardzo głęboką analizę tego problemu (zaiste godną inspektora Wnikliwego) przysłał **J. Konieczny**. Zwrócił on uwagę na fakt, że pola magnetyczne trzech przewodów linii trójfazowej na ogół się znoszą przy ziemi i większe nadzieje stwarza wykorzystanie pola elektrycznego. Uzyskiwane napięcie mogłoby – według obliczeń p. Koniecznego – wynosić kilkadziesiąt woltów, jednak czerpany z ogrodzenia prąd wynosiłby poniżej 1 mA. Uff... aczkolwiek uczciwość Czytelników *Delty* powinna być ponad wszelkim podejrzeniem, to miło jest uzyskać pewność, że nie przysłużyliśmy się jakiejś czarnej owcy... Pozostałe dwa dobre rozwiązania przysłali **A. Nowogrodzki** i **J. Łazuka**.

Zadanie **166.** [Pręt wpada do środka pierścienia; czy przeleci na drugą stronę?] ($WT = 3{,}70$, $LPR = 0$). Eleganckie rozwiązanie nadesłał **P. Perkowski** – niestety, po ustalonym terminie. Szkoda!

Zadanie **167.** [Oddziaływanie przewodnika z prądem z płaszczyzną nadprzewodzącą] ($WT = 1{,}99$, $LPR = 4$). Pan **A. Borowski** znalazł rozwiązanie w literaturze – okazuje się, że ten problem był na jednej z Olimpiad Fizycznych.

Zadanie **168.** [Promień krążący po okręgu] ($WT = 2{,}59$, $LPR = 3$). Obok zależności $n(r)$ częścią rozwiązania miało być znalezienie toru promienia, jeśli początkowo jest on dowolnie skierowany. Gdy wskutek pomyłki to pytanie zostało pominięte, z zadania niewiele zostało. W przysłanych rozwiązaniach godne uwagi u **T. Wietechy** i **J. Łazuki** jest eleganckie zastosowanie zasady Fermata. Trzecie bezbłędne rozwiązanie – **P. Gworys**.

Zadanie **175.** [Poziomo wieje wiatr, którego prędkość rośnie liniowo z wysokością; po jakim czasie dźwięk dotrze z A do B?] ($WT = 2{,}26$, $LPR = 3$). Zadanie zostało sformułowane jako numeryczne, gdyż autorowi nie udało się – mimo prób – znaleźć rozwiązania analitycznego. Zaproponowane rozwiązanie opiera się na dość radykalnym uproszczeniu problemu – wprowadzono dwie warstwy, w których prędkość wiatru uznano za stałą. Jak jednak wykazał **P. Gadziński**, jeśli zamiast szukać drogi minimalizującej czas będziemy maksymalizować przesunięcie poziome w ciągu zadanego czasu, to odpowiadającą temu całkę można po dość zawiłych przekształceniach obliczyć analitycznie bez żadnych przybliżeń! Chapeau bas, panie Przemysławie! Pozostałe dobre rozwiązania (czysto numeryczne) przysłali **A. Gawryszczak** i **P. Gworys**.

Zadanie **179.** [Moc silnika helikoptera] ($WT = 2{,}80$, $LPR = 2$). Choć zadanie było dość proste, wyniki są nienajlepsze. Dlaczego tak wielu rozwiązujących nie wzięło pod uwagę, że nawet gdy helikopter wisi nieruchomo ($v = 0$), moc silnika nie może być równa zeru? Prawidłowe rozwiązanie – **A. Gawryszczak**, niezłe – **P. Gworys**, grubych błędów udało się uniknąć jeszcze **P. Wasylczykowi**.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 180 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	38,37
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	1–37,73
Tomasz Wietecha	– Tarnów	1–37,09
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	3–29,11
Aleksander Surma	– Myszków	2–21,49
Dariusz Wilk	– Rzeszów	19,43
Konrad Banaszek	– Gdynia	13,70
Paweł Perkowski	– Szczecin	2–13,02
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	12,30
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	12,08
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	11,70
Przemysław Gworys	– Częstochowa	2–11,69
Roman Wencel	– Komprachcice	11,60
Sławomir Oszwałdowski	– Grudziądz	9,70
Jarosław Łazuka	– Warszawa(?)	8,07
Adam Sikorski	– Lublin	3–6,95
Andrzej Rostworowski	– Kraków	6,77
Piotr Wasylczyk	– Warszawa	6,59
Stanisław Świątek	– Kłodzko	6,50
Artur Stępień	– Bełchatów	5,97
Arkadiusz Kowalski	– Lublin	5,63

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1992–1994 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 5 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia **44** punktów): Piotr Bała (3), Anna Gluza (1), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Bogusław Mikielewicz (1), Leszek Motyka (1), Roman Musiał (1), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Jacek Stelmach (1), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1).